
「寿命の二変量」による 製品寿命の予測の基礎と応用

2015年3月6日

BioStat研究所(株) 高橋 行雄

takahashi.stat@nifty.com

目次

1. JMPによる寿命データの解析	3
2. ワイブル分布	22
3. 寿命の一変量での解析	38
4. 加速試験データの解析	45
5. JMPによる寿命の二変量	63
6. 最小極値分布 (必須の予備知識)	74
7. 回帰分析の拡張	89
8. 尤度を用いた95%信頼区間	98
9. 今後の課題	109
文献 113, 付録1. 合成分散の一般式	115
付録2. JMPによる偏微分の計算法	118
付録3. 廣野事例に対する改善提案	122

1. JMPによる寿命データの解析

寿命の予測

- ◆ 工業製品の通常的环境下での寿命を予測するために、加速寿命試験が行われている。
- ◆ JMPの「寿命の二変量」では、多くのグラフ表示に加えて各種の信頼区間の推定が手軽にできる。
- ◆ 日本語に翻訳されている 440ページにもなる操作マニュアルだけでは、使いこなすための説明が不足している。

品質管理および信頼性/生存時間

13 寿命の分布

「寿命の一変量」プラットフォームの使用	215
寿命データ分析の概要	217
寿命データ分析の例	217
「寿命の一変量」プラットフォームの起動	220
「寿命の一変量」レポートウィンドウ	221
イベントプロット	221
「分布の比較」レポート	223
「統計量」レポート	224
「競合原因分析」レポート	226
「寿命の一変量」プラットフォームのオプション	228
「寿命の一変量」プラットフォームの別例	229
競合原因の除去	229
スケールの変更	231
統計的詳細	233
ノンパラメトリックな推定値	234
パラメトリックな分布	234

JMPバージョン10 マニュアル 第13章 目次

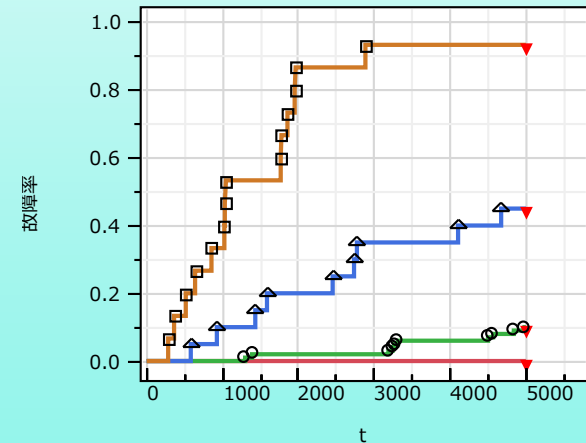
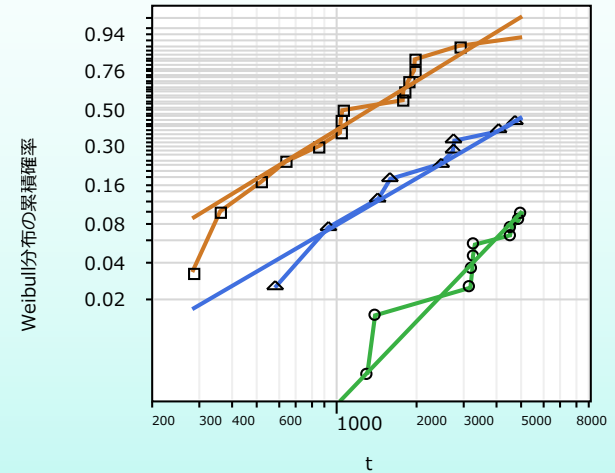
JMP サンプルデータ (Devalt) デバイスA

古いJMPでは(V7まで)

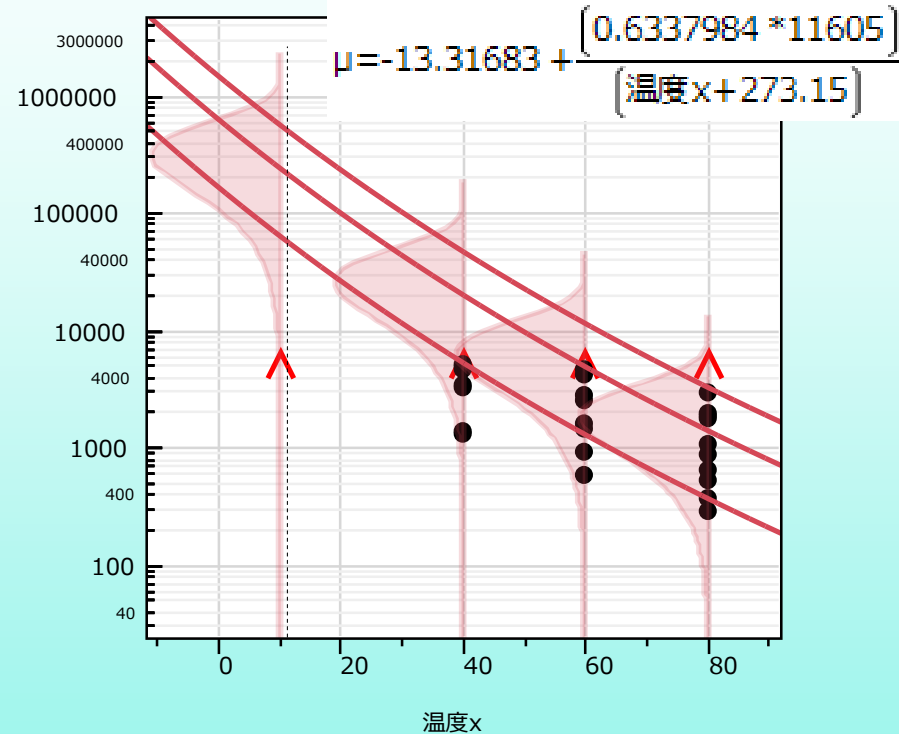
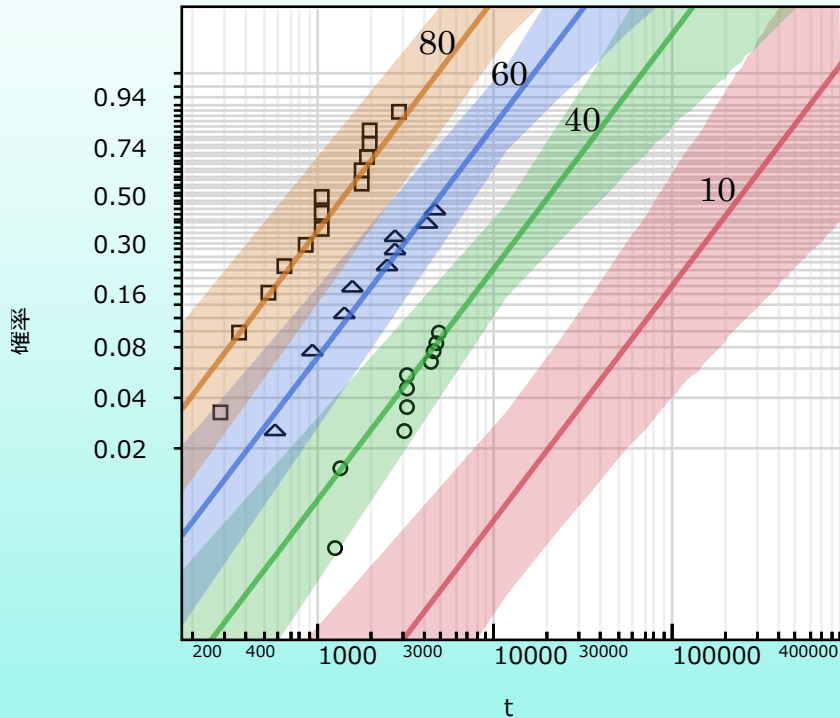
温度				
	10	40	60	80
5000 + (30件)	1298	581	283	
	1390	925	361	
	3187	1432	515	
	3241	1586	638	
	3261	2452	854	
	3313	2734	1024	
	4501	2772	1030	
	4568	4106	1045	
	4841	4674	1767	
	4982	5000 +	1777	
5000 + (90件)		(11件)	1856	
			1951	
			1964	
			2884	
			5000 + (1件)	

10°Cでは故障データがない。10°Cでの寿命はどのように推定したらよいのだろうか。

+: 打ち切り



デバイス A の温度と寿命 V8から



10°Cでは故障データがない。

69枚目から 10%故障率で 64,128 時間と推定。

2000年のJMP資料(廣野氏)

データ分析の窓

SFC「数量データ分析入門」(2004春学期: 廣野元久 クラス)への入り口 ... させていただいた内容です. 資料はPDFです. (01) 2000JMPユーザー会資料(工業における生存時間分析)pdf:ここを右クリックする. (03) 生存時間分析JMPデータここを右クリックする ...

www1.odn.ne.jp/~gengen525/ - 別窓で開く - キャッシュ

JMPに関する公開資料

JMPによる生存時間分析の資料について

JMPer'sミーティングやセミナーでお話させていただいた内容です. 資料はPDFです.

(01) 2000JMPユーザー会資料(工業における生存時間分析)pdf:ここを右クリックする

(03) 生存時間分析JMPデータここを右クリックする

JMP V4 ハンズオンセミナー

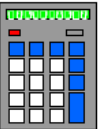
～生存時間分析の実行～

廣野氏のチャレンジ

- 接着剤の寿命試験における寿命モデルのパラメータを推定する。但し、時間分布として、ワイブル分布を指定する。
- 変数の意味
 - Glue(接着剤の種類)-----
 - $1/(kT)$ (試験環境の絶対温度)
 - RH(試験環境の相対湿度)
 - Day(生存日数)
 - Censor(打ち切りの有無)

この解析法は比例ハザードモデルによる解析法の影響を受けている。

- ワイブル分布の形状パラメータは,
 $\beta = 1/\delta = 1.8596$ と推定できる。
- 接着剤の違いは、1%有意で,
 $\alpha = \exp(0.2575423) = 1.294$ であるから,
Aの方がBより1.3倍ほど信頼性が高い。
 $\alpha = \exp(-4.8603917 + 0.28443285/kT - 0.0330083RH)$
- 温度の偏回帰係数は反応論モデルでは活性化エネルギーの推定値
 $E_a = 0.28443285(\text{eV})$
95%信頼区間は、0.1033674~0.4646598(eV)



廣野氏が用いた接着剤データ

	glue = A						glue = B					
相対湿度	60%		70%		80%		60%		70%		80%	
温度	Day	Cen sor	Day	Cen sor	Day	Cen sor	Day	Cen sor	Day	Cen sor	Day	Cen sor
30°C	54	0	29	0	16	1	6	1	32	0	17	0
	71	0	39	0	21	0	10	0	50	1	27	1
	113	1	62	0	34	0	24	0	13	0	7	0
40°C	38	0	21	0	11	0	4	0	22	0	12	0
	50	0	27	1	15	1	7	1	35	1	19	1
	79	0	43	0	24	0	17	0	9	0	5	0
50°C	13	0	15	0	13	0	12	0	16	0	8	0
	36	0	19	0	10	0	9	0	25	1	14	1
	57	0	31	1	17	1	15	1	6	0	3	0

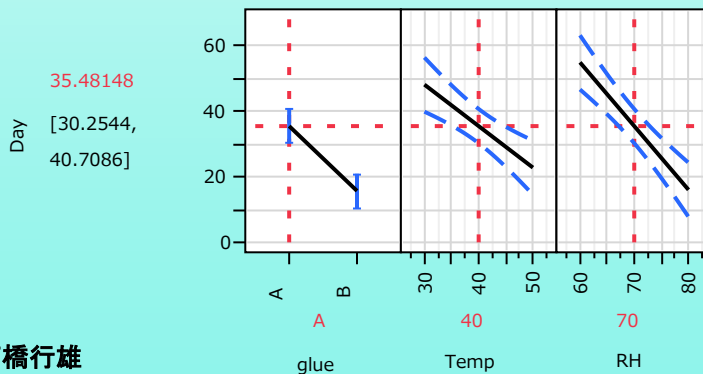
打ち切りがなければ簡単

3元配置(2質×3量×3量), 繰返し3

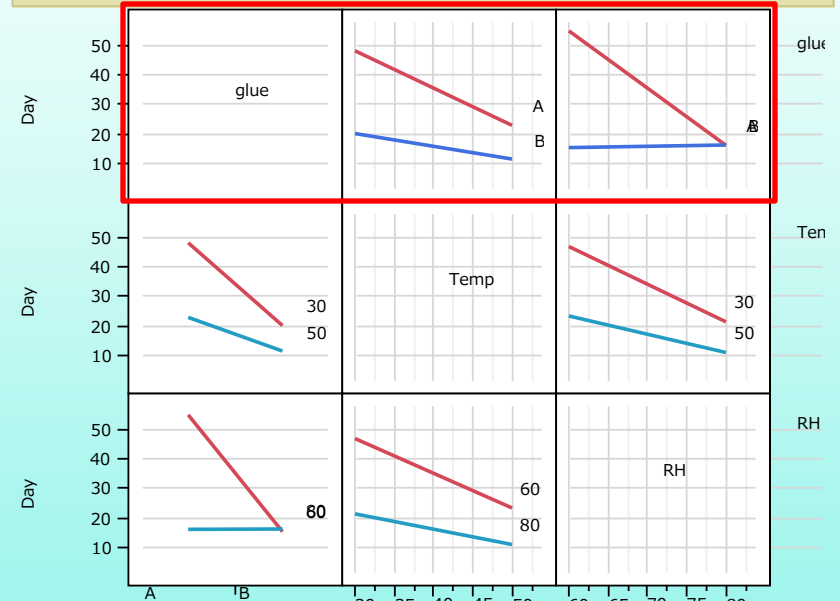
効果の検定

要因	自由	平方和	F値	p値(Prob>F)
glue	1	5280.6667	28.9699	<.0001 *
Temp	1	2601.0000	14.2692	0.0004 *
RH	1	3249.0000	17.8241	0.0001 *
glue*Temp	1	625.0000	3.4288	0.0704
glue*RH	1	3560.1111	19.5309	<.0001 *
Temp*RH	1	260.0417	1.4266	0.2383

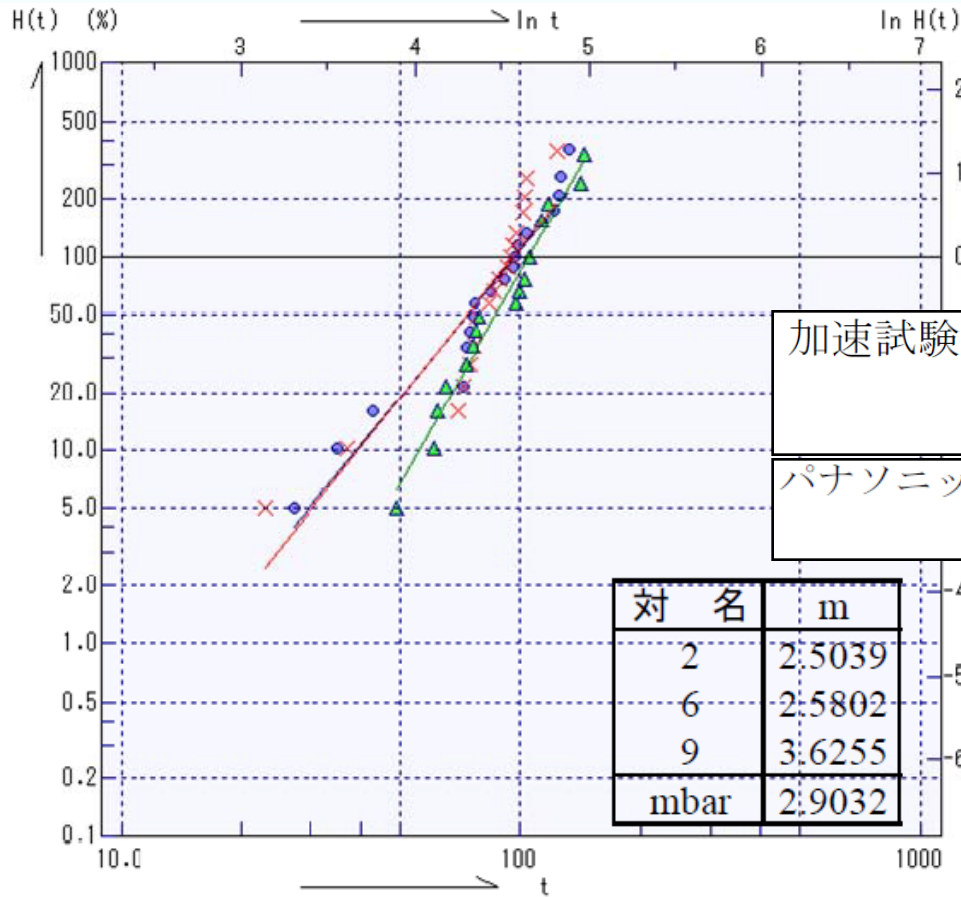
予測プロファイル



交互作用プロファイル



日本の寿命データ解析の現状



古典的なワイブル型
累積ハザード紙が活
用されている

加速試験の寿命予測精度に必要な
試験水準の設定と故障データに関する考察
パナソニック株式会社 デバイス社 半導体事業グループ
清水貴宏

© 2011, The Institute of JUSE. All Rights Reserved

図9 母集団の形状パラメータ推定実験

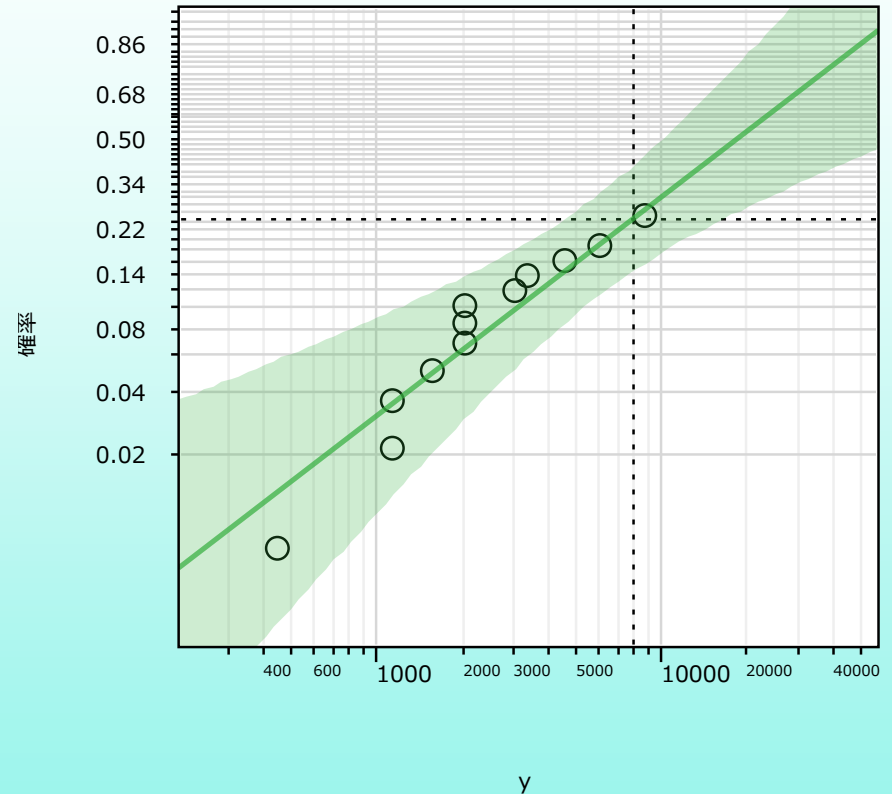
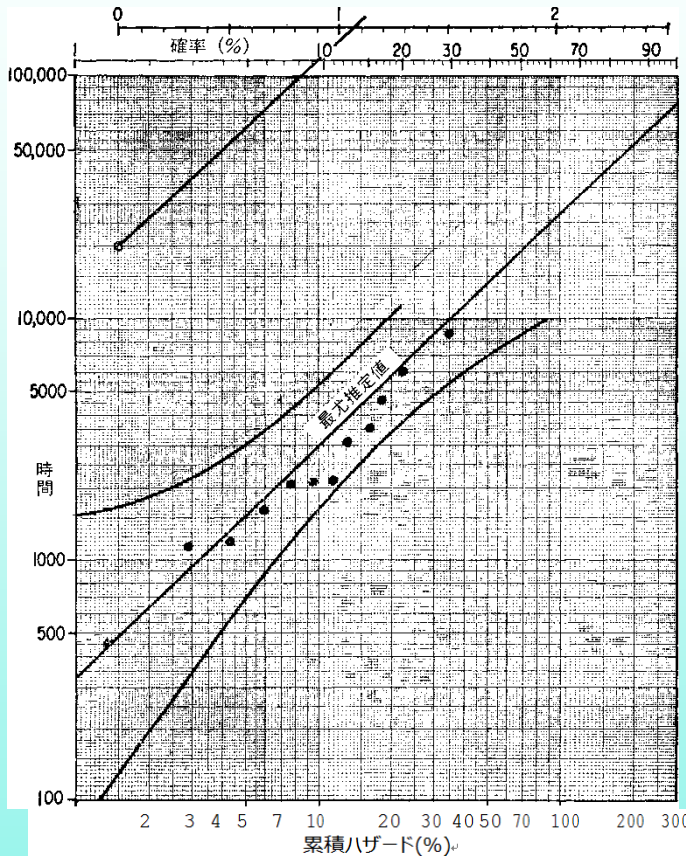
ディーゼル発電機ファン

JMPの「寿命の一変量」の事例

450	1850 +	2200 +	3750 +	4300 +	6100	7800 +	8750 +	
460 +	1850 +	3000 +	4150 +	4600	6100 +	7800 +	8750 +	
1150	1850 +	3000 +	4150 +	4850 +	6100 +	8100 +	9400 +	
1150	2030 +	3000 +	4150 +	4850 +	6100 +	8100 +	9900 +	
1560 +	2030 +	3000 +	4150 +	4850 +	6300 +	8200 +	10100 +	
1600	2030 +	3100	4300 +	4850 +	6450 +	8500 +	10100 +	
1660 +	2070	3200 +	4300 +	5000 +	6450 +	8500 +	10100 +	
1850 +	2070	3450	4300 +	5000 +	6700 +	8500 +	11500 +	
1850 +	2080	3750 +		5000 +	7450 +	8750		

+ 動作時間を示す 奥野忠一監訳（1988），「寿命データの解析」，p293，表8.1.1.

累積ハザード紙： JMPでは？



奥野ら. 図8.3.1 JMPでは, ワイブル確率紙

最尤法でのパラメータ推定

- ◆ JMPでは、古くから最尤法が寿命データの解析で使われていて、ワイブル確率紙をベースにした解析法は使われていない。
- ◆ 奥野忠一監訳，柴田義貞，藤野和建，鎌倉稔成 訳(1988)，寿命データの解析，日科技連出版社。本書には、最尤法について丁寧な説明と数値例があるが、難解である。
 - 逆説的には、この本が日本での最尤法の普及の阻害要因となったと思われる。

芳賀氏の教え

- ◆ 新しい統計的な方法については、Excelで計算が再現できるように努力する。
- ◆ 新しい方法についての解説は、レンガを積むがごとく、順を追って行い、途中を省かない。
- ◆ Excelの結果と統計ソフトの結果を対比し、一致するか確認する。
- ◆ 奥野監訳本での学習が、加速試験データの統計解析の基礎となった。

高橋のチャレンジ

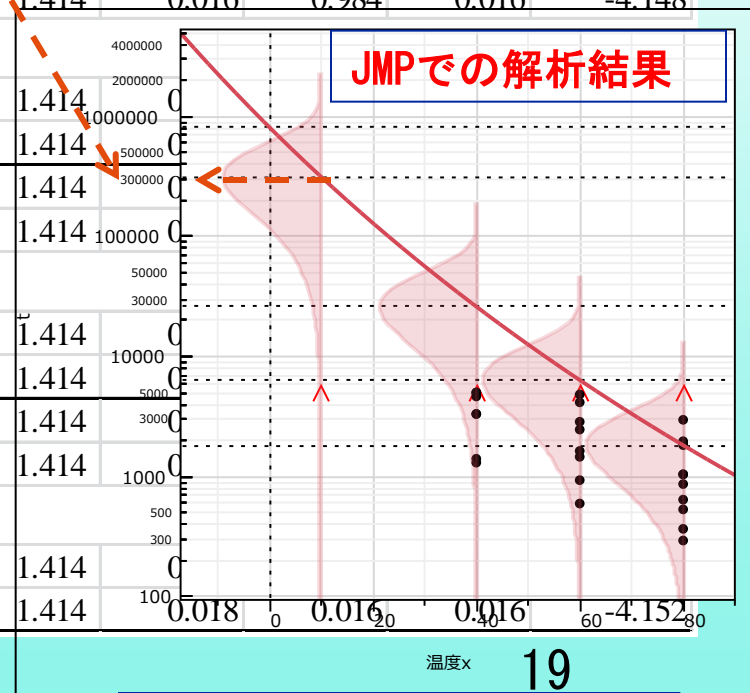
- ◆ JMPの「寿命の二変量」を使った加速寿命試験データの統計解析について、基礎の基礎から段階的に「レンガ積」のごとく Excelでの計算結果を示しつつ、JMPでの解析法と結果の解釈について解説する。
- ◆ 詳細な資料およびExcelシートを用意し、自由にダウンロードできるように準備している。

寿命データ解析の困難さ

- ◆ 誤差分布に正規分布が仮定できない
 - 通常の回帰分析・分散分析が適用できない
- ◆ ワイブル分布のあてはめ
 - パラメータの推定に最尤法が使われている
 - Excel での計算事例を見出すことができない
- ◆ 途中打ち切りデータ
 - どのように扱うのが妥当なのか，故障データとどのように区別するのかが，茫洋としている

Excel による10°Cでの α の推定

$\alpha = \exp(\alpha_{\text{切片}} + \alpha_{\text{傾き}} \frac{11605}{\text{温度}_i + 273.15})$				α	$\alpha_{\text{切片}} =$	-20.224	$\alpha_{\text{傾き}} =$	0.634	$\ln L =$	-95.663		
				β	共通 $\beta =$	1.414						
変数x	アレニウス	件		パラメータ			ワイブル分布		尤度			
群	温度	温度	t_{1000}	数	δ	生存率	α	β	$f(t)$	$1-F(t)$	Li	$\ln Li$
	0	42.5					814.674					
1	10	41.0	5.000	30	0	1.000	314.758	1.414	0.001	0.997	0.997	-0.086
2	40	37.1	1.298	1	1	0.990	26.135	1.414	0.015	0.986	0.015	-4.175
2	40	37.1	1.390	1	1	0.980	26.135	1.414	0.016	0.984	0.016	-4.148
							:					
2	40	37.1	4.982	1	1	0.900	26.135	1.414				
2	40	37.1	5.000	90	0	0.900	26.135	1.414				
3	60	34.8	0.581	1	1	0.950	6.380	1.414				
3	60	34.8	0.925	1	1	0.900	6.380	1.414				
							:					
3	60	34.8	4.674	1	1	0.550	6.380	1.414				
3	60	34.8	5.000	11	0	0.550	6.380	1.414				
4	80	32.9	0.283	1	1	0.933	1.827	1.414				
4	80	32.9	0.361	1	1	0.867	1.827	1.414				
							:					
4	80	32.9	2.884	1	1	0.067	1.827	1.414				
4	80	32.9	5.000	1	0	0.067	1.827	1.414				



「寿命の二変量」での解析

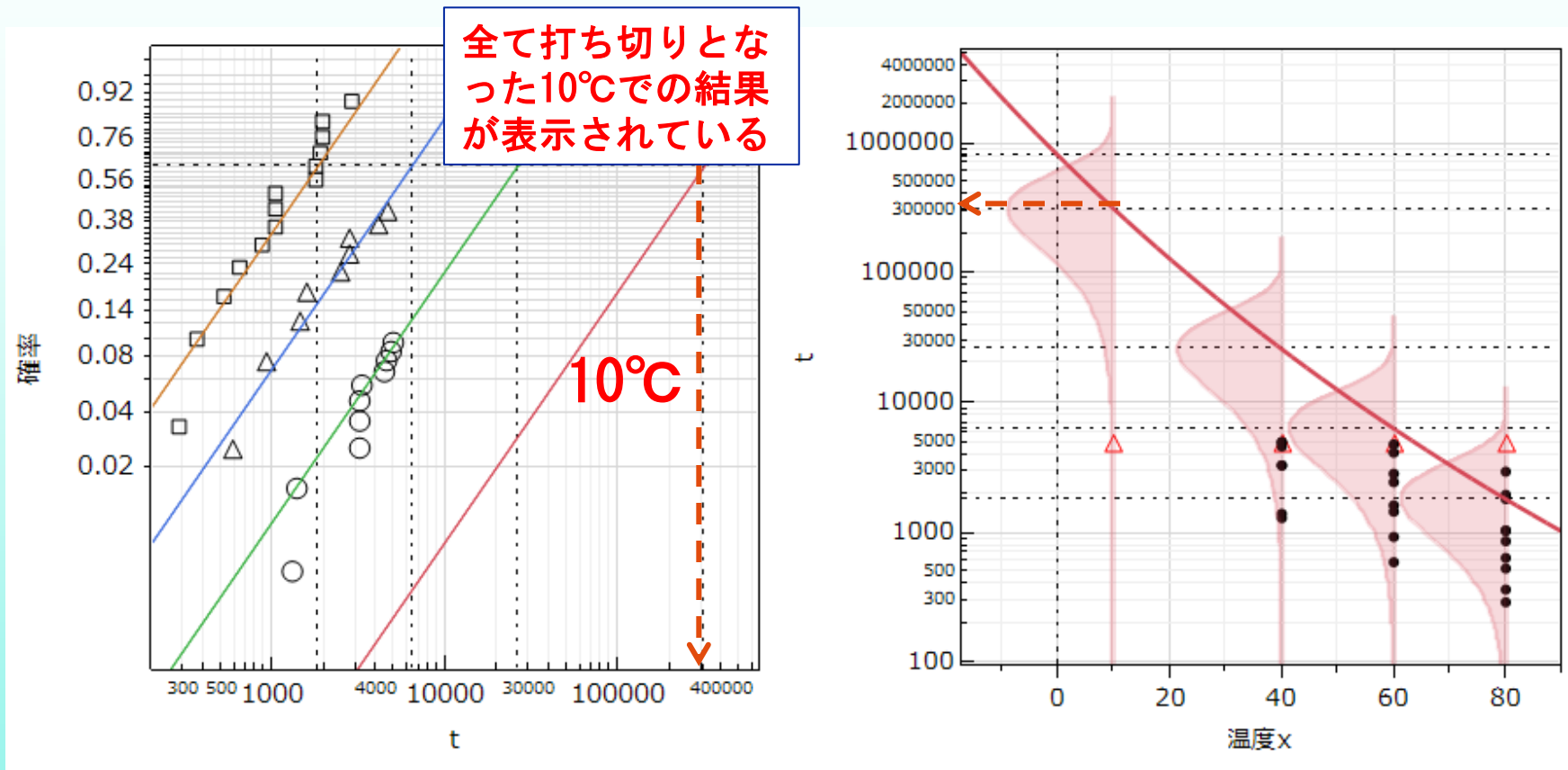
The screenshot shows the JMP software interface. On the left is a data table with columns: No, t, t/1000, y=ln(t), n, 温度x, and 打ち切り. The data table contains 19 rows of observations. On the right is the '寿命の二変量' (Two-Variable Lifetime) analysis dialog box. The dialog is configured with the following settings:

- 列の選択 (Column Selection):** 温度x (Temperature x) is selected as the X variable.
- 選択した列に役割を割り当てる (Assign Roles to Selected Columns):**
 - Y, イベントまでの時間 (Y, Time to Event): t/1000 (オプション(数値) (Option (Numeric)))
 - 打ち切り (Censoring): オプション (Option)
 - 度数 (Degrees of Freedom): n
 - By: オプション (Option)
- 打ち切りの値 (Censoring Value):** 関係 (Relationship)
- 関係 (Relationship):** Arrhenius 摂氏 (Arrhenius Celsius), 包含モデルの検定 (Include Model Test) is checked.
- 分布 (Distribution):** Weibull
- 信頼区間の方法 (Confidence Interval Method):** Wald

A red box highlights the 'Weibull' distribution selection in the dialog box.

No	t	t/1000	y=ln(t)	n	温度x	打ち切り	
1	1	5000	5.000	8.517	30	10	1
2	2	1298	1.298	7.169	1	40	0
3	3	1390	1.390	7.237	1	40	0
4	4	3187	3.187	8.067	1	40	0
5	5	3241	3.241	8.084	1	40	0
6	6	3261	3.261	8.090	1	40	0
7	7	3313	3.313	8.106	1	40	0
8	8	4501	4.501	8.412	1	40	0
9	9	4568	4.568	8.427	1	40	0
10	10	4841	4.841	8.485	1	40	0
11	11	4982	4.982	8.514	1	40	0
12	12	5000	5.000	8.517	90	40	1
13	13	581	0.581	6.365	1	60	0
14	14	925	0.925	6.830	1	60	0
15	15	1432	1.432	7.267	1	60	0
16	16	1586	1.586	7.369	1	60	0
17	17	2452	2.452	7.805	1	60	0
18	18	2734	2.734	7.914	1	60	0
19	19	2772	2.772	7.927	1	60	0

デバイスAの加速試験の解析結果

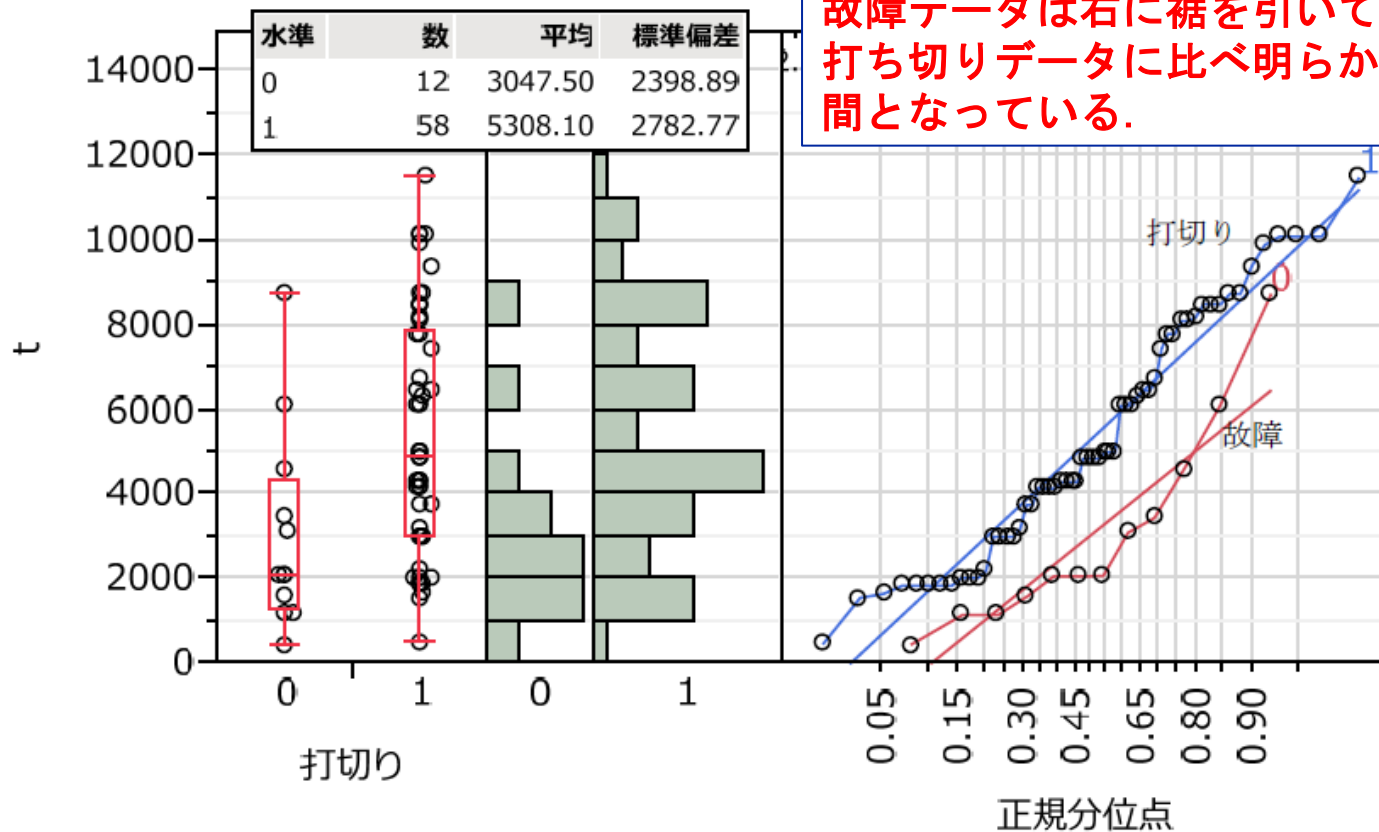


Weibull α はワイブル分布の下側63.2%点

2. ワイブル分布のあてはめ

データの性質（+：打ち切り1）

ディーゼル発電機ファンの故障時間データ



ワイブル分布

ワイブル分布の累積分布関数 $F(t)$ は, t を寿命時間とし,

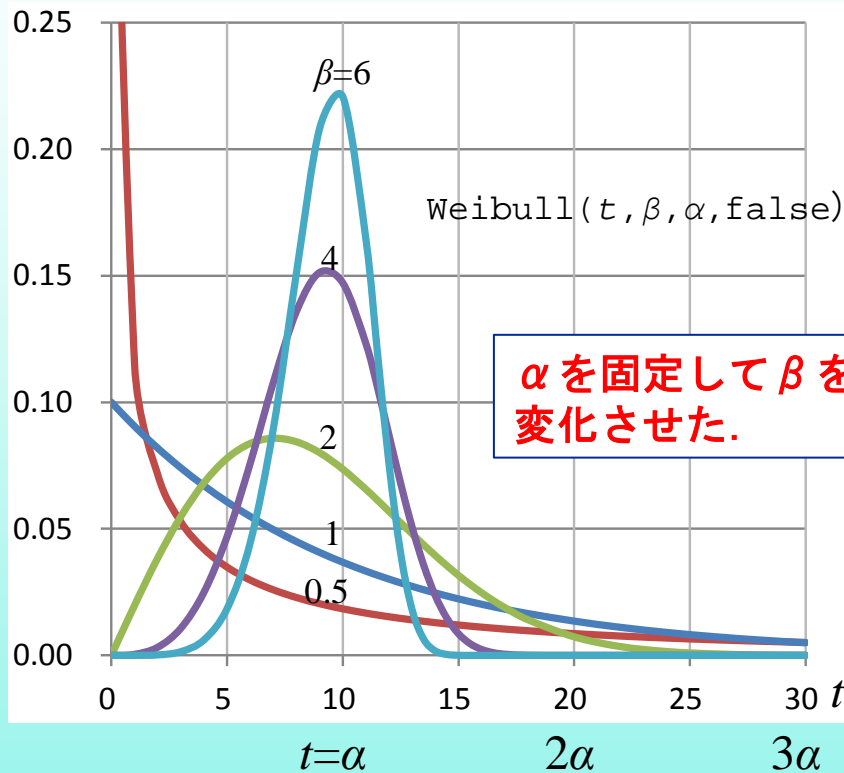
$$F(t) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right\}$$

で与えられる, 尺度 (scale) パラメータを α , 形状 (shape) パラメータを β といい, 共に正である. 確率密度関数 $f(t)$ は, 累積分布関数 $F(t)$ を t で微分して

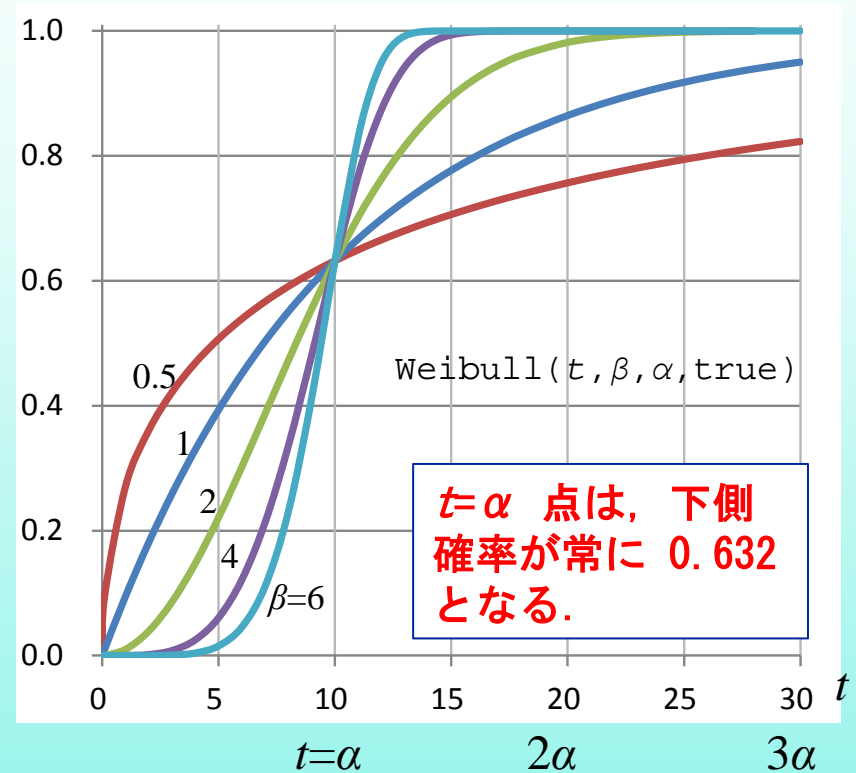
$$f(t) = \frac{\beta}{\alpha^\beta} t^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right\}$$

が得られる.

ワイブル分布の形状 (Excel関数)



確率密度関数



累積分布関数

不統一なパラメータの表記

- ◆ ワイブル分布のパラメータ
 - 尺度パラメータを α
 - 形状パラメータを β
- ◆ 日本の信頼性関係の書物
 - 尺度パラメータを $\eta \rightarrow \alpha$
 - 形状パラメータを $m \rightarrow \beta$
- ◆ Excelの関数
 - $A \rightarrow \beta, B \rightarrow \alpha$

英文の本では、本ごとに異なる。JMPマニュアル表19.2に詳細が示されている。

故障データに限定した解析

- ◆ ディーゼル発電機ファンの故障データ
450, 1150, 1150, 1600, 2070, 2070,
2080, 3100, 3450, 4600, 6100, 8750

故障した 12 台のファンがワイブル分布に従うとし、その確率密度関数 $f(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, r$ の積を尤度 L

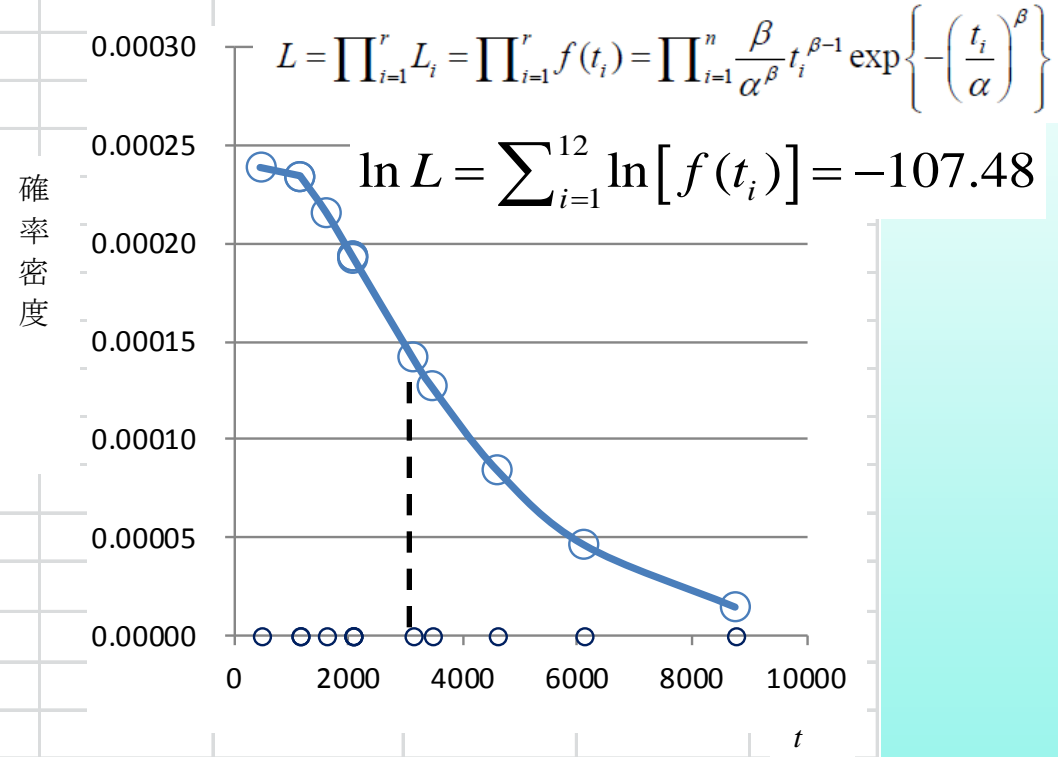
$$L = \prod_{i=1}^r L_i = \prod_{i=1}^r f(t_i) = \prod_{i=1}^r \frac{\beta}{\alpha^\beta} t_i^{\beta-1} \exp \left\{ - \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta \right\}$$

とする。

初期値 $\alpha = 3100, \beta = 1.2$

No	故障時間 t_i	ワイブル密度 $f(y_i)$	対数尤度 $\ln f(y_i)$
1	450	0.000238	-8.341
2	1150	0.000234	-8.359
3	1150	0.000234	-8.359
4	1600	0.000216	-8.441
5	2070	0.000193	-8.554
6	2070	0.000193	-8.554
7	2080	0.000192	-8.556
8	3100	0.000142	-8.857
9	3450	0.000127	-8.972
10	4600	0.000084	-9.384
11	6100	0.000047	-9.974
12	8750	0.000015	-11.123
尤度		2.110E-47	-107.48
		$-2L =$	214.95
例示			
1	450	0.000238	-8.34

$\alpha =$ **3100.0** $\beta =$ **1.200**



α は、下側確率 0.632点
 β は、歪んだ一山型

=WEIBULL(\$C22,\$J\$5,\$H\$5, FALSE)

y_1 β α 密度関数

パラメータを逐次的に変化

計算された対数尤度 $\ln L = -107.475$ を最大にするように
試行錯誤的に Weibull パラメータ α と β を逐次的に変化させる
初期値 $\hat{\alpha} = 3100$, $\hat{\beta} = 1.2$ を前後に動かしながら
 $\ln L = 107.475$ が最大になるよう探索する

Excel のアドインのソルバーを用いた最尤法による統計解析

芳賀敏郎 (2004), 「最小 2 乗法, 最尤法, 線形モデル, 非線形モデル」

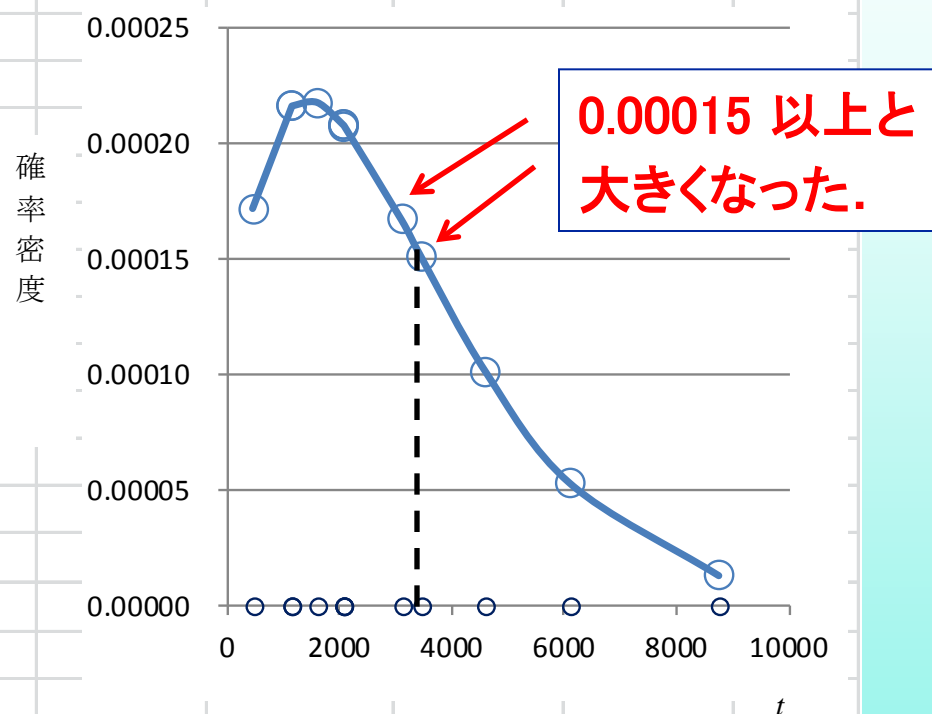
<http://www.yukms.com/biostat/haga/download/archive/likelihood/Likelihood.pdf>

ソルバーによる尤度 L の最大化

No	故障時間 t_i	ワイブル密度 $f(y_i)$	対数尤度 $\ln f(y_i)$
1	450	0.000172	-8.670
2	1150	0.000216	-8.440
3	1150	0.000216	-8.440
4	1600	0.000218	-8.433
5	2070	0.000208	-8.479
6	2070	0.000208	-8.479
7	2080	0.000207	-8.481
8	3100	0.000167	-8.698
9	3450	0.000151	-8.799
10	4600	0.000101	-9.199
11	6100	0.000053	-9.845
12	8750	0.000013	-11.238

$\alpha =$ **3370.5**

$\beta =$ **1.415**



尤度	2.770E-47	-107.20
$-2L =$		214.41

例示

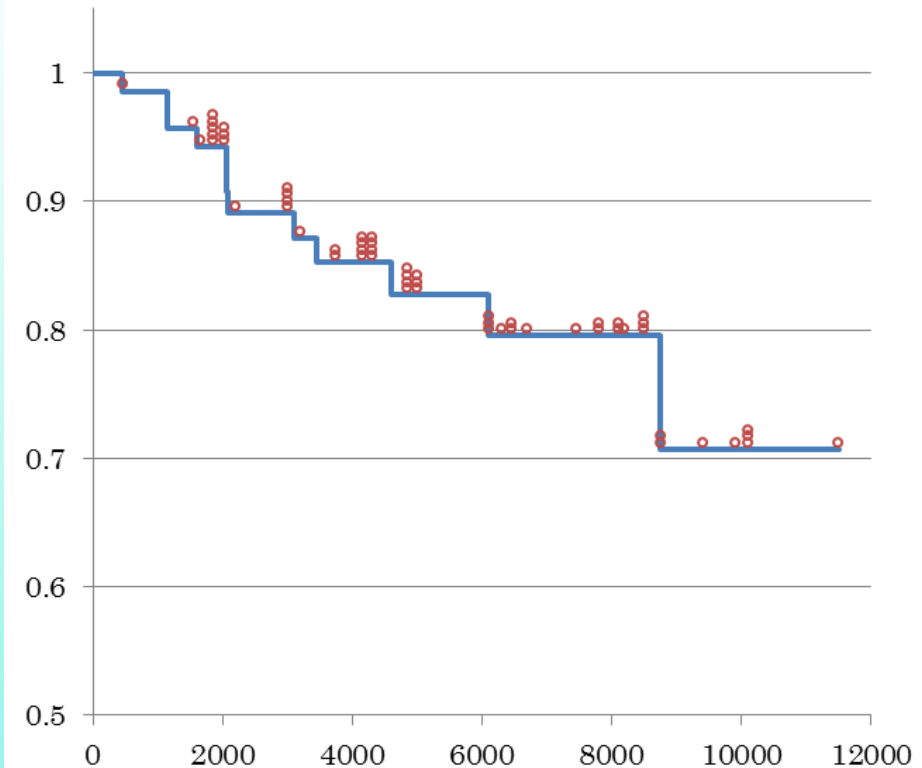
1	450	0.000172	-8.67
---	-----	----------	-------

=WEIBULL(\$C22,\$J\$5,\$H\$5,FALSE)

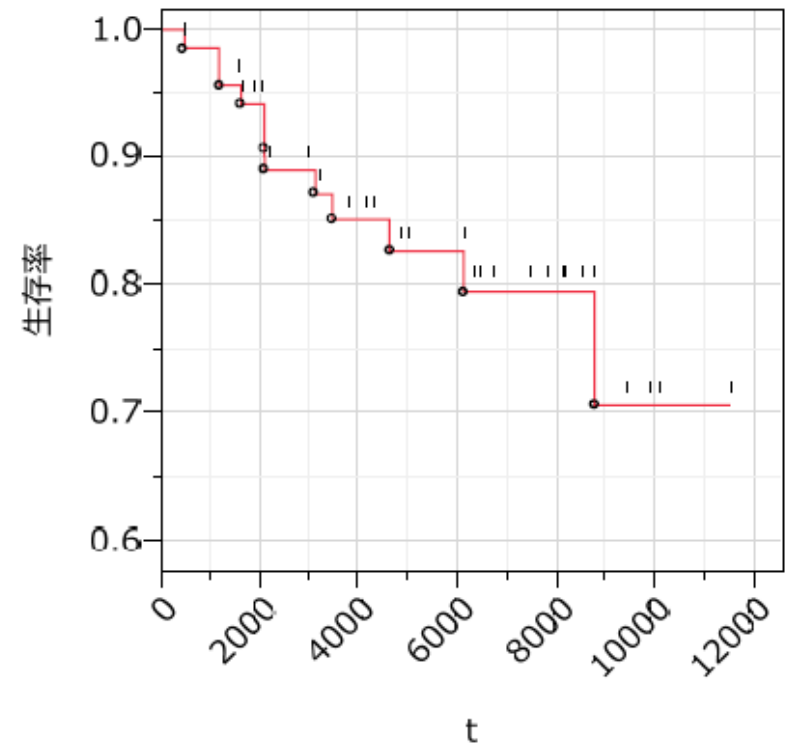
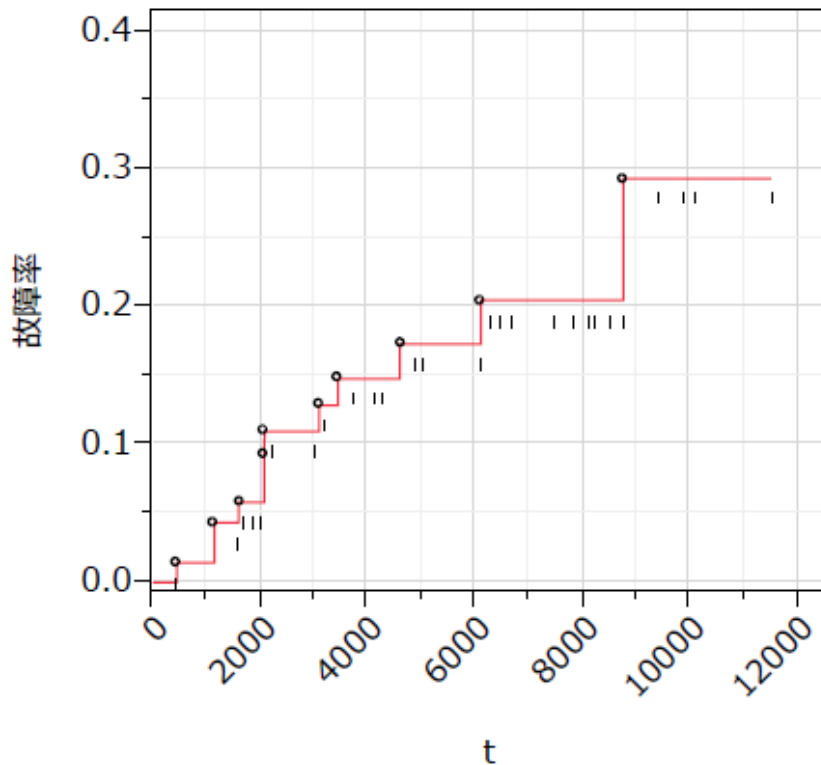
y_i β α 密度関数

打ち切りを考慮した故障率

No	$t +$	故障	瞬間 故障率	生存率 稼働率	故障率
1	450	1 / 70	0.014	0.986	0.014
2	460 +			0.986	
3	1150	1 / 68	0.015	0.971	0.029
4	1150	1 / 67	0.015	0.957	0.043
5	1560 +			0.957	
6	1600	1 / 65	0.015	0.942	0.058
7	1600 +			0.942	
61	8500 +			0.795	
62	8750	1 / 9	0.111	0.707	0.293
63	8750 +			0.707	
64	8750 +			0.707	
65	9400 +			0.707	
66	9900 +			0.707	
67	10100 +			0.707	
68	10100 +			0.707	
69	10100 +			0.707	
70	11500 +			0.707	



「生存時間分析」による故障率



打ち切りデータの尤度

故障データ t_i がワイブル分布の確率密度関数 $f(t)$ に従う

打ち切りデータ：その時点まで稼働している

その後に故障がいつ起きるかはわからない。

打ち切られた時間までは、「生存」している

ワイブル分布の上側確率，生存関数 $[1-F(t)]$ を尤度とする

$$\begin{aligned} L &= \prod_{i=1}^n f(t_i)^{\delta_i} [1-F(t_i)]^{1-\delta_i} \\ &= \prod_{i=1}^n \left\{ \frac{\beta}{\alpha^\beta} t_i^{\beta-1} \exp \left[-\left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta \right] \right\}^{\delta_i} \cdot \left\{ \exp \left[-\left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta \right] \right\}^{1-\delta_i} \end{aligned}$$

確率密度関数 + 生存関数の尤度

	Weible $\alpha =$		26296.9				$\ln L =$	-135.15
	Weible $\beta =$		1.0584				$-2 \ln L =$	270.31
No	t	$+$	δ	$f(t)$	$1-F(t)$	$F(t)$	Li	$\ln Li$
1	450		1	0.000031	0.987	0.013	0.000031	-10.37
3	1150		1	0.000032	0.964	0.036	0.000032	-10.34
4	1150		1	0.000032	0.964	0.036	0.000032	-10.34
6	1600		1	0.000032	0.950	0.050	0.000032	-10.34
69	10100	+	0	0.000026	0.695	0.305	0.6955	-0.36
70	11500	+	0	0.000025	0.659	0.341	0.6592	-0.42
	密度関数			=WEIBULL(C77, \$E\$5, \$E\$4, FALSE)				
	生存関数			=1-WEIBULL(C77, \$E\$5, \$E\$4, TRUE)				
						$y_{70},$	$\beta,$	α

故障 : $\delta_i = 1$, 打切り : $\delta_i = 0$

ワイブル確率プロット

最尤推定量は, $\hat{\alpha} = 26,296$, $\hat{\beta} = 1.058$

最後の故障 : 8,750 時間, 推定故障率 : $\hat{F}(t_{62}) = 0.263$

最後の打切り : 11,500 時間, 推定故障率 : $\hat{F}(t_{70}) = 0.341$

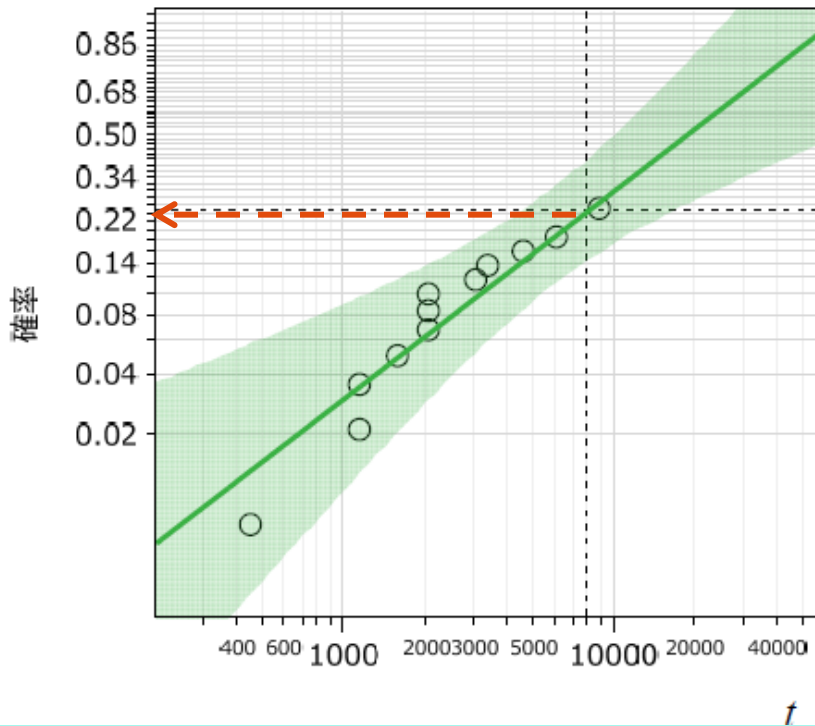
ノンパラメトリックな方法 : 最後故障率 : 0.293

$\hat{F}(t_i)$ を $\ln\{\ln[1/(1-\hat{F}(t_i))]\}$ と 2 重対数変換

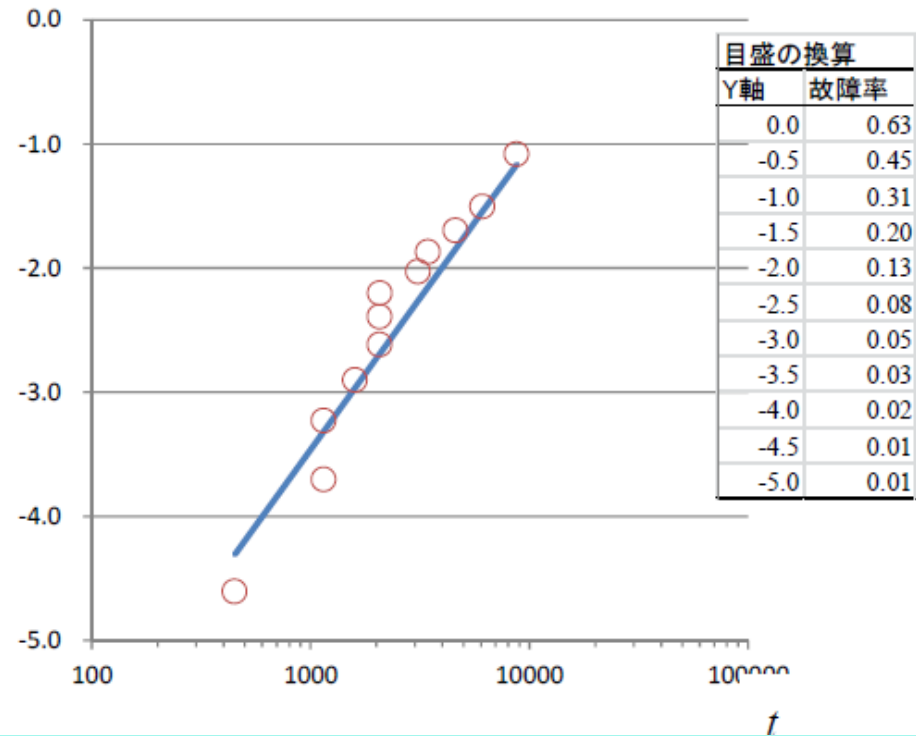
時間 t を対数目盛

メディアン・ランク法で調整した故障データのプロット

JMP, Excel によるプロット

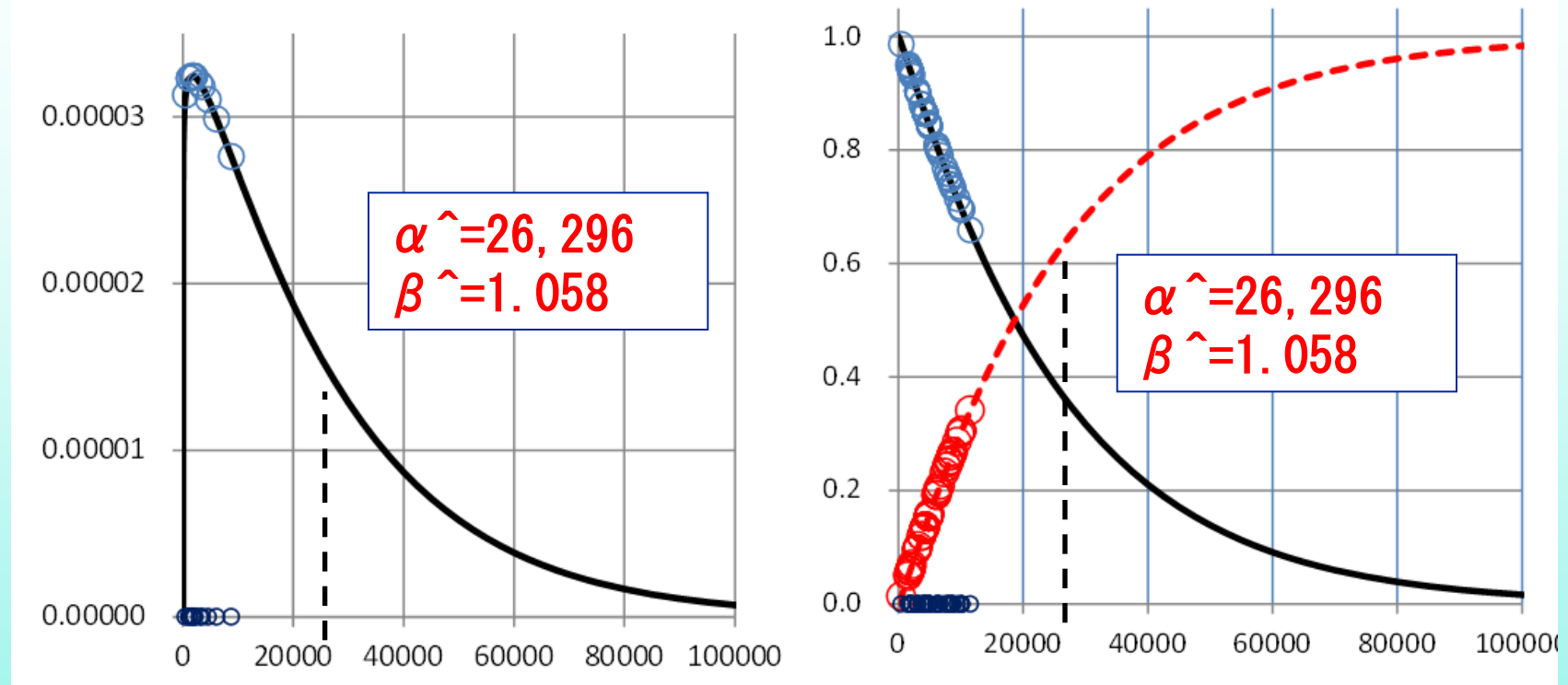


8000時間での故障率の推定
信頼区間が示されている



Excel による信頼区間は
スライド 84

尤度の可視化



ワイブル分布の確率密度関数・生存関数の
同時にあてはめてパラメータを推定している

3. 寿命の一変量での解析

JMPのサンプル・ライブラリ

◀ 信頼性分析／生存時間分析

Appliance	生存時間分析
Comptime	モデルのあてはめ（生存時間（パラメトリック））、Weibull分布および対数正規分布
Devalt	二変量の関係（二変量）、生存時間分析、モデルのあてはめ（生存時間（パラメトリック））
Engine Valve Seat	再生モデルによる分析
Fan	非線形回帰(指数損失、Weibull損失、極値損失)
ICdevice02	生存時間分析、モデルのあてはめ(生存時間分析(パラメトリック))
Locomotive	寿命の一変量
Microprocessor Data	寿命の一変量
Motorette	モデルのあてはめ（生存時間（パラメトリック））
Tobit2	生存時間(パラメトリック)
Blenders	生存時間分析

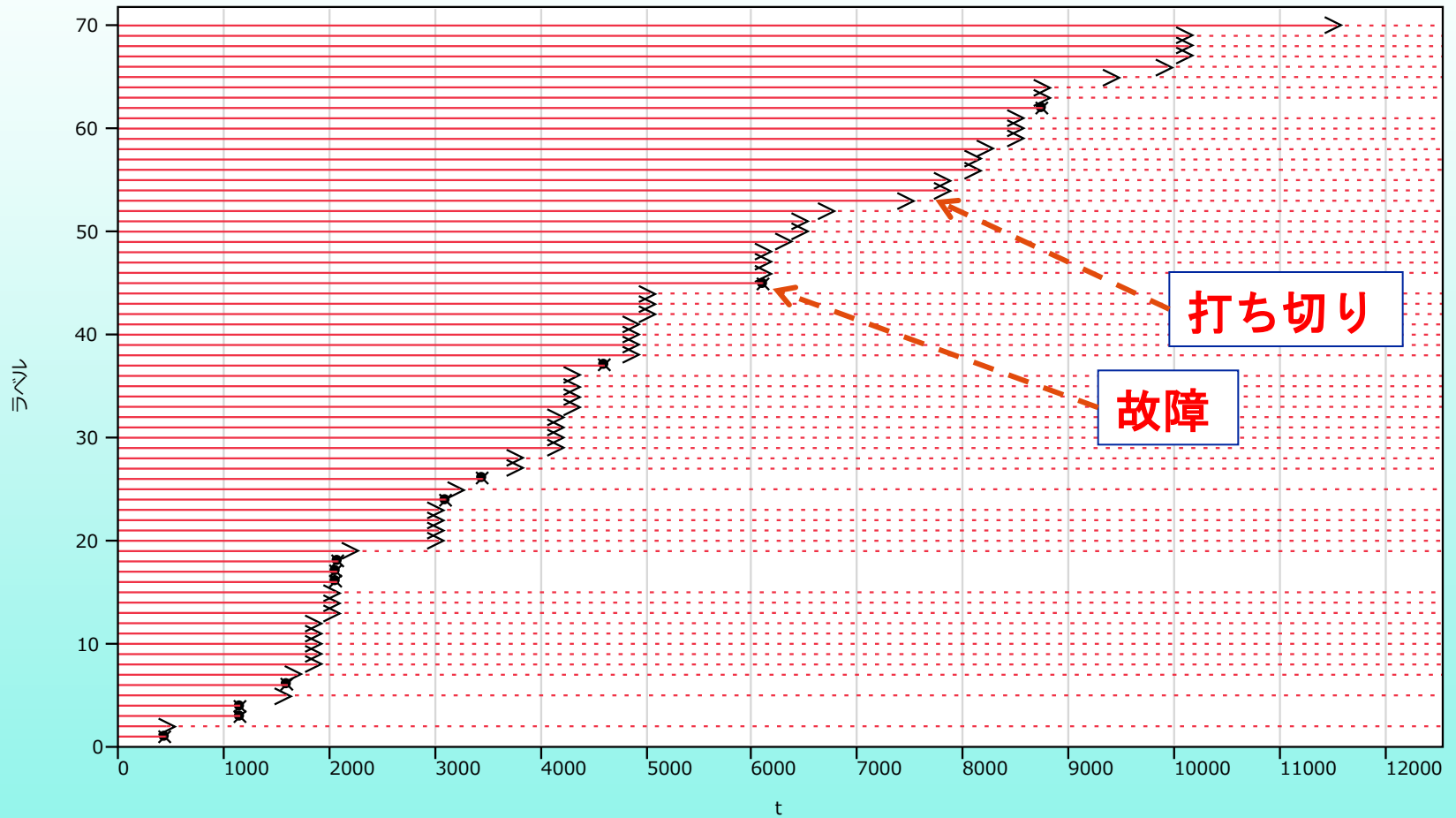
ディーゼル発電機ファン

Fan - JMP [2]

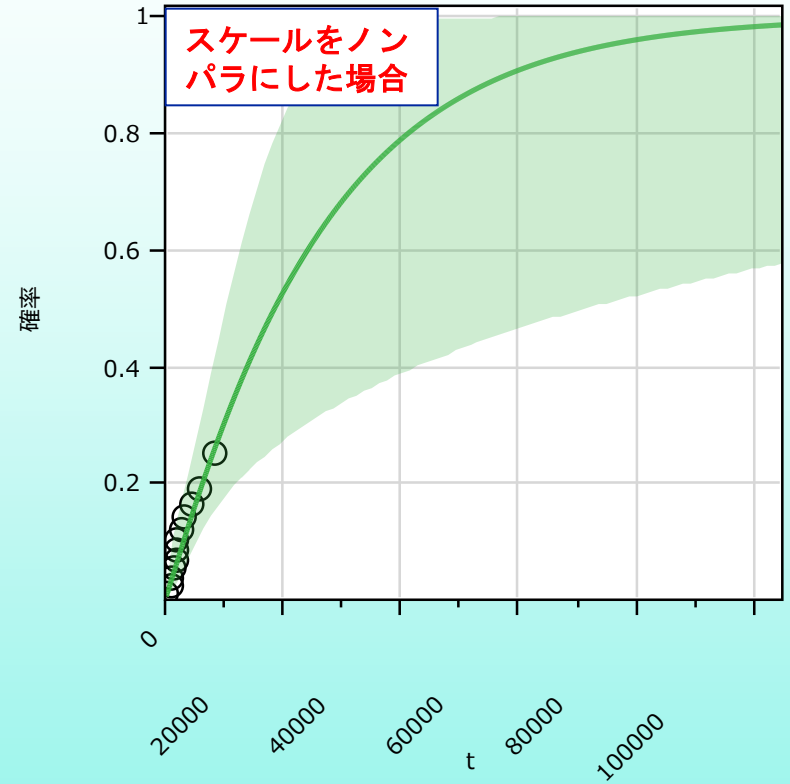
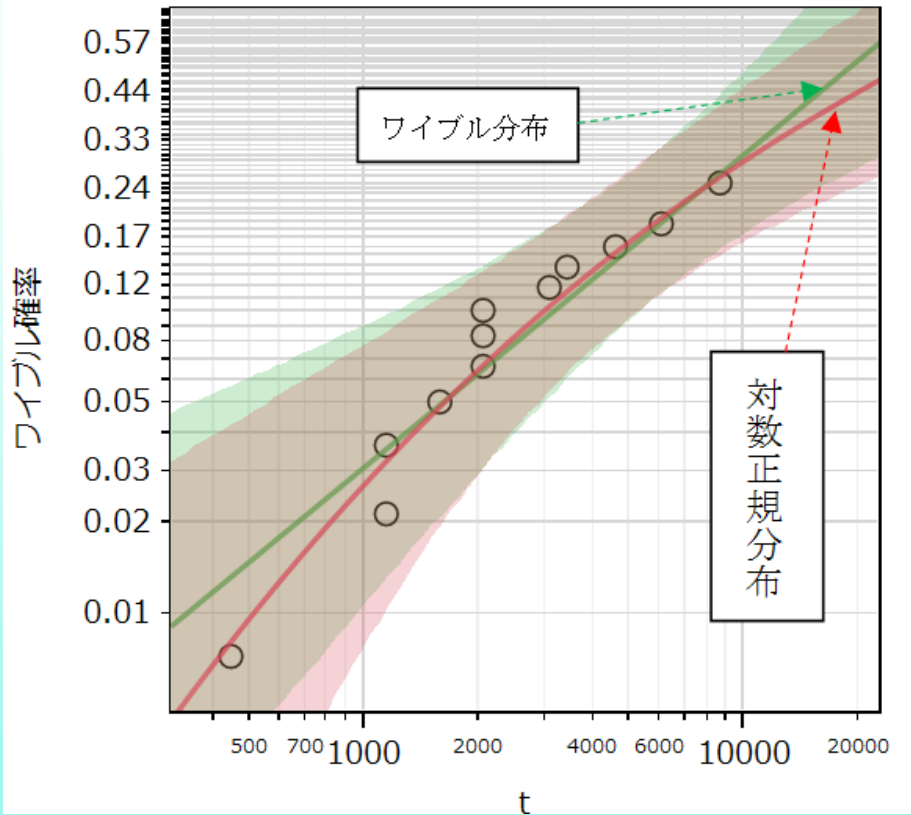
ファイル(F) 編集(E) テーブル(T) 行(R) 列(C) 実験計画(DOE)(D) 分析(A) グラフ(G) ツール(O) 表示(V) ウィンドウ(W) ヘルプ(H)

	時間	打ち切りの有無	指数損失関数	Weibull損失関数	極値損失関数		
1	450	0	10.2804462	450	1.96405344		
2	460	1	0.01602601	460	0.16922454		
3	1150	0	10.3048336	1150	1.28329941		
4	1150	0	10.3048336	1150	1.28329941		
5	1560	1	0.05434909	1560	0.57389193		
6	1600	0	10.3205112	1600	1.11860348		
すべての行	70	66	9900	1	0.34490768	9900	3.64200647
選択されている行	0	67	10100	1	0.35187551	10100	3.71558236
除外されている行	0	68	10100	1	0.35187551	10100	3.71558236
表示しない行	0	69	10100	1	0.35187551	10100	3.71558236
ラベルのついた行	0	70	11500	1	0.40065033	11500	4.23061357

イベントプロット



ワイブル確率プロット



各種の分布のあてはめ曲線が重ね書きされる

ワイブール・パラメータの推定 Wald

パラメータ	推定値	標準誤差	下側95%	上側95%
位置	10.1772	0.4659	9.2641	11.0903
尺度	0.9448	0.2394	0.4755	1.4141
Weibull α	26296.8452	12251.4283	10552.0697	65534.4483
Weibull β	1.0584	0.2683	0.7072	2.1031

- ◆ 位置？ 尺度？（これらは最小極値）
 - 最小極値分布のパラメータ, 何のため？
- ◆ Wei. $\alpha = \exp(\text{位置}\mu)$, Wei. $\beta = 1/\text{尺度}\sigma$
 - Weibull では, 信頼区間の計算が難しい

パラメータの分散共分散行列

パラメータ	位置	尺度
位置	0.217053	0.090442
尺度	0.090442	0.057333

- ◆ Weibull については出力されない
 - 位置 μ の標準誤差: 0.217053 の平方根
 - 尺度 σ の標準誤差: 0.057333 の平方根
- ◆ 最小極値分布は, 対数正規分布と類似
(スライド 74~88)

4 加速試験データの解析

寿命の二変量

デバイスAの高温下での寿命試験

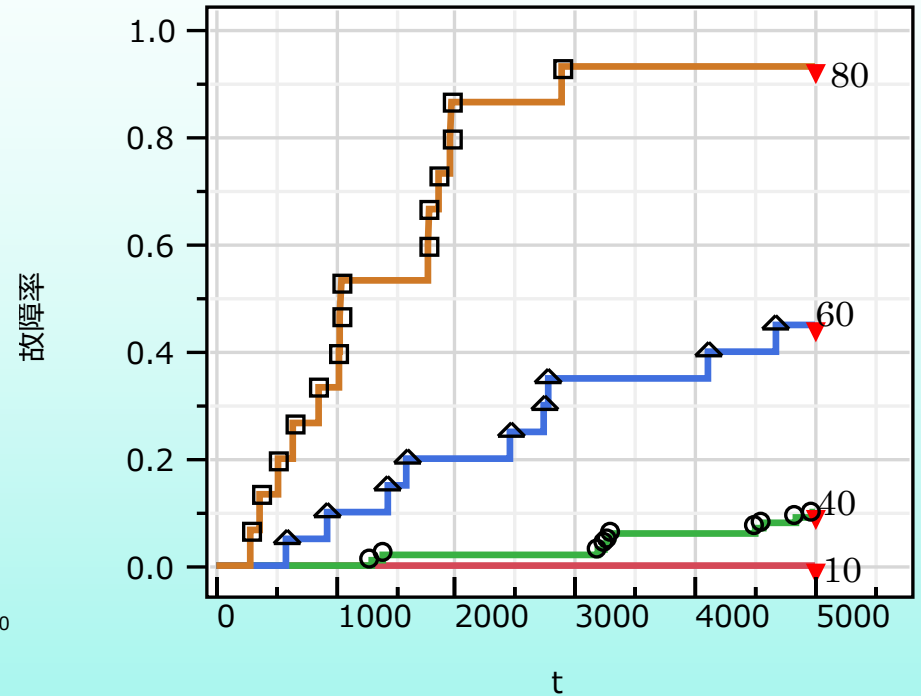
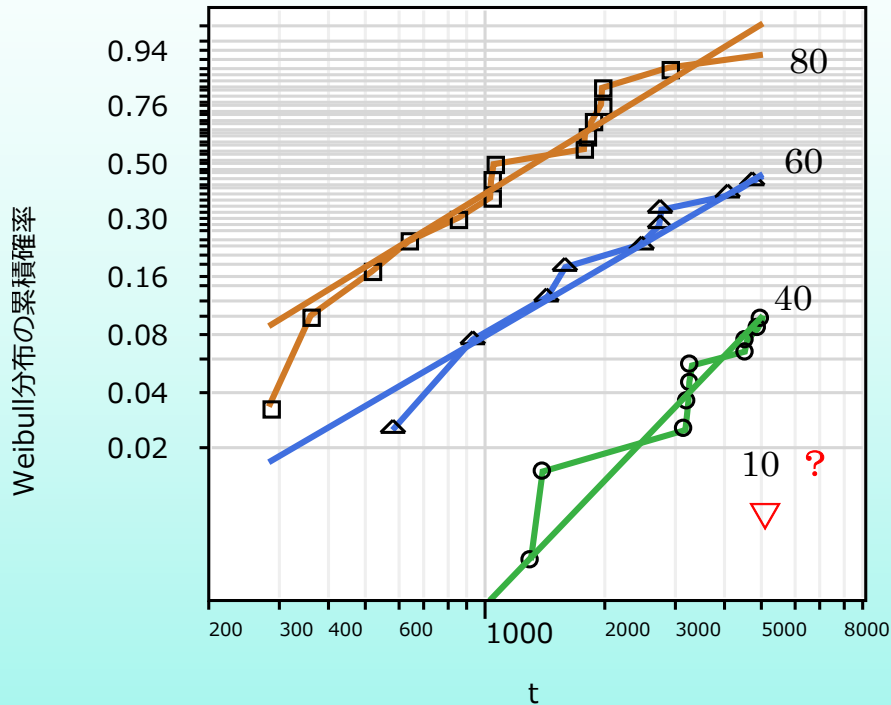
温度				
10	40	60	80	
5000 +	1298	581	283	
(30件)	1390	925	361	
	3187	1432	515	
	3241	1586	638	
	3261	2452	854	
	3313	2734	1024	
	4501	2772	1030	
	4568	4106	1045	
	4841	4674	1767	
	4982	5000 +	1777	
	5000 +	(11件)	1856	
	(90件)		1951	
			1964	
			2884	
			5000 +	
			(1件)	

◆ サンプルデータ

● Davalt.jmp

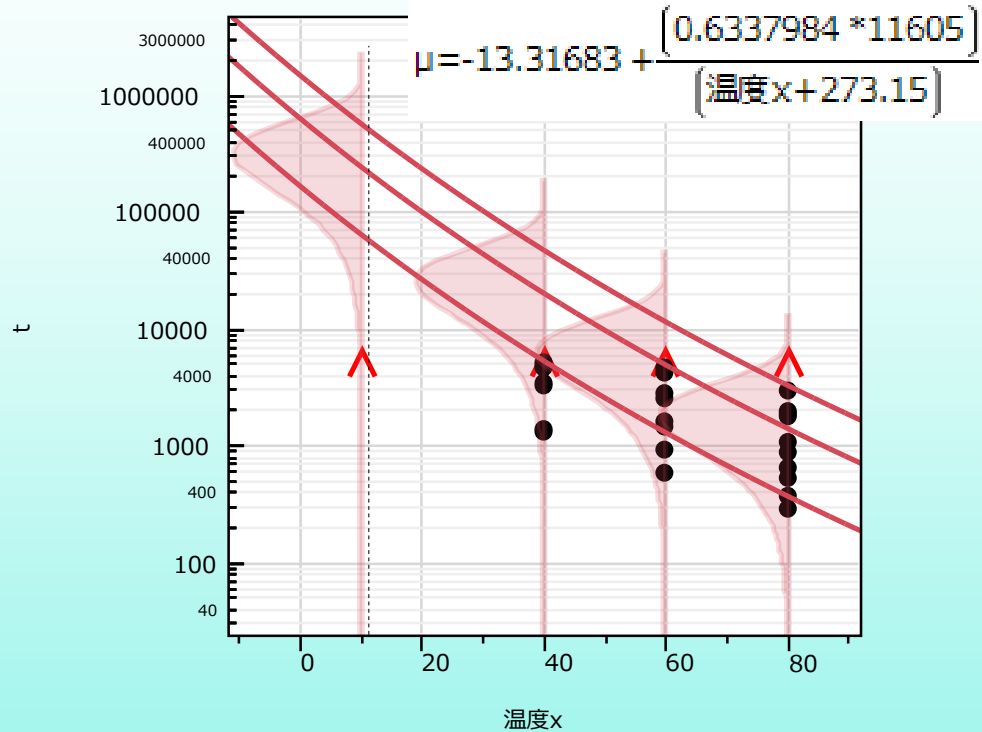
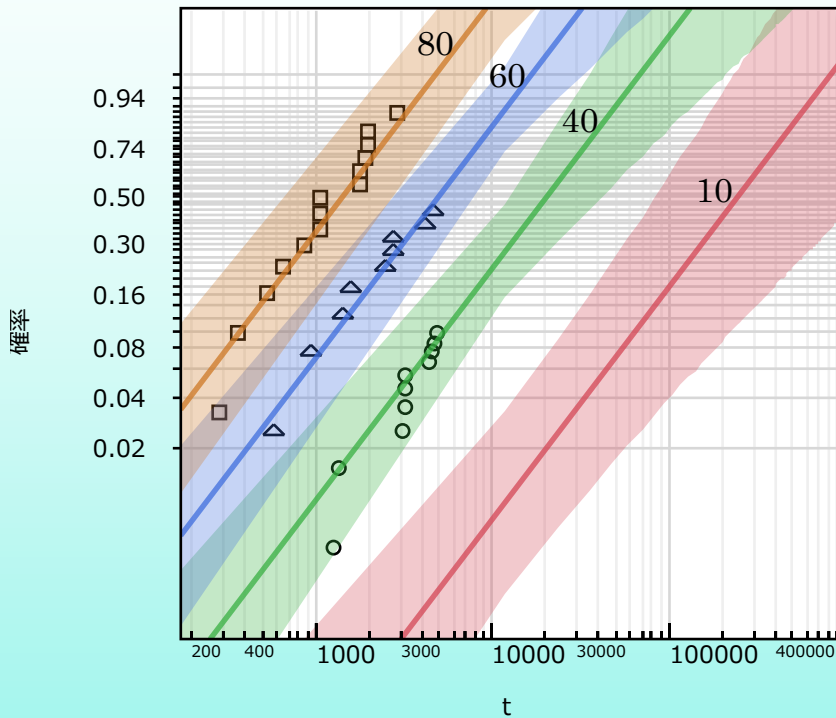
◆ Meeker and Escobar (1998)
, Chapter 19
Accelerated Life Test, p493.

V7までのワイブル確率プロット



- ◆ 10°Cでの設定で, 5000時間まで故障が発生せず, 30枚全数が打切られた.

このような解析がほしかった



- ◆ アレニウス変換温度を用いた最小極値分布を誤差とする回帰分析の適用例

段階的な解析

◆ 1元配置型の実験モデル

- 誤差分布はワイブル, 打ち切りあり
- 各温度の Weibull α_j , β_j の同時推定
- Weibull β_j を共通として α_j の推定

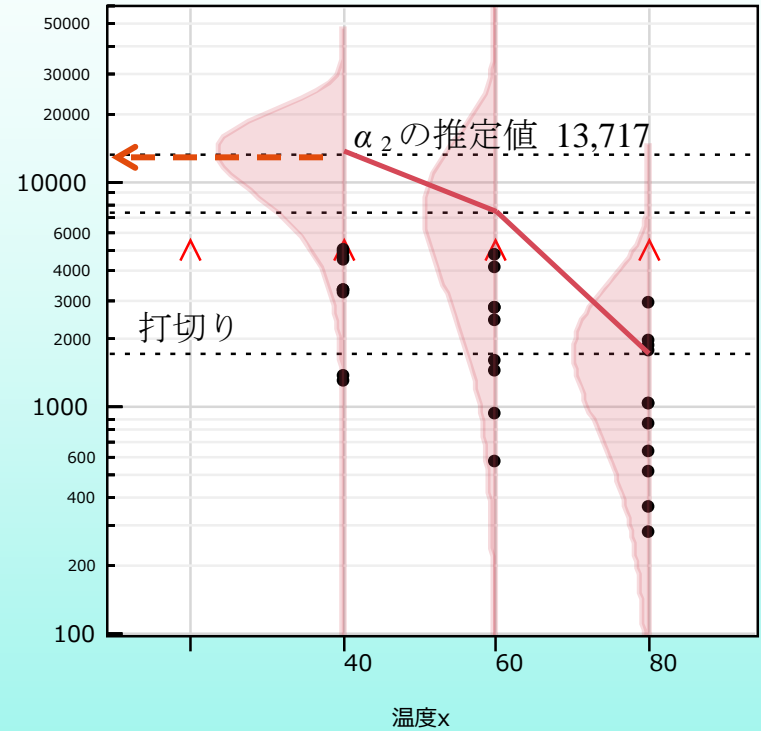
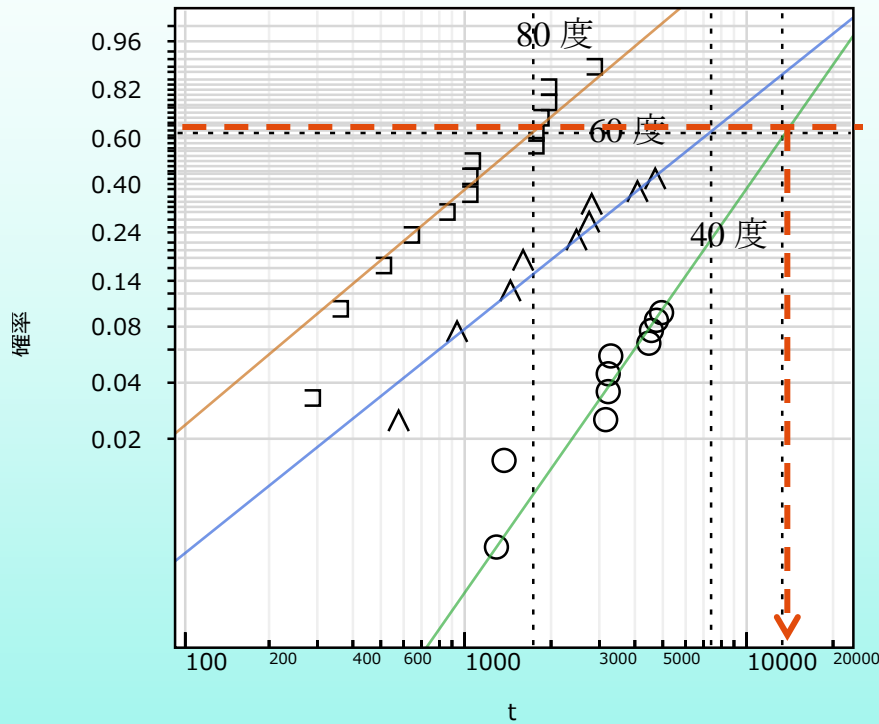
◆ 温度を連続量とした回帰分析

- 温度を x として回帰式をあてはめ, α_j の推定
- 温度をアレニウス変換し回帰式をあてはめ, α_j の推定

各温度の α_j, β_j の同時推定

		$\alpha = \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4$ $\beta = \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4$								α	-	13.717	7.406	1.740	$\ln L_i =$	-94.387
										β	-	2.233	1.249	1.312		
										群	1	2	3	4		
						変数 x				パラメータ		ワイブル分布				
群	温度	t_{1000}	件数	δ	生存率	x_1	x_2	x_3	x_4	α	β	$f(y)$	$1-F(t)$	Li	$\ln L_i$	
1	10	5.000	30	0	1.000	1	0	0	0	-	-	-	-	-	-	
2	40	1.298	1	1	0.990	0	1	0	0	13.717	2.233	0.009	0.995	0.009	-4.727	
2	40	1.390	1	1	0.980	0	1	0	0	13.717	2.233	0.010	0.994	0.010	-4.643	
:																
2	40	4.982	1	1	0.900	0	1	0	0	13.717	2.233	0.042	0.901	0.042	-3.168	
2	40	5.000	90	0	0.900	0	1	0	0	13.717	2.233	0.042	0.900	0.900	-9.457	
3	60	0.581	1	1	0.950	0	0	1	0	7.406	1.249	0.086	0.959	0.086	-2.455	
3	60	0.925	1	1	0.900	0	0	1	0	7.406	1.249	0.093	0.928	0.093	-2.372	
:																
4	80	2.884	1	1	0.067	0	0	0	1	1.740	1.312	0.127	0.144	0.127	-2.065	
4	80	5.000	1	0	0.067	0	0	0	1	1.740	1.312	0.019	0.018	0.018	-3.994	

JMPによる作図



α	-	13.717	7.406	1.740
β	-	2.233	1.249	1.312
群	1	2	3	4

結果の解釈

- ◆ 40°C, 60°C, 80°C を別々に平均値と標準偏差を算出したことに対応する.
- ◆ 40°Cの場合の下側確率 0.632 となる推定値 $\hat{\alpha}_2 = 13,717$ 時間である.
- ◆ $\hat{\beta}_2 = 2.233$ であり遅発故障と判断される.
- ◆ 全数が打切りの10°Cについては, 解析できない.
- ◆ 古いJMPの標準的な対応は, ここまで.

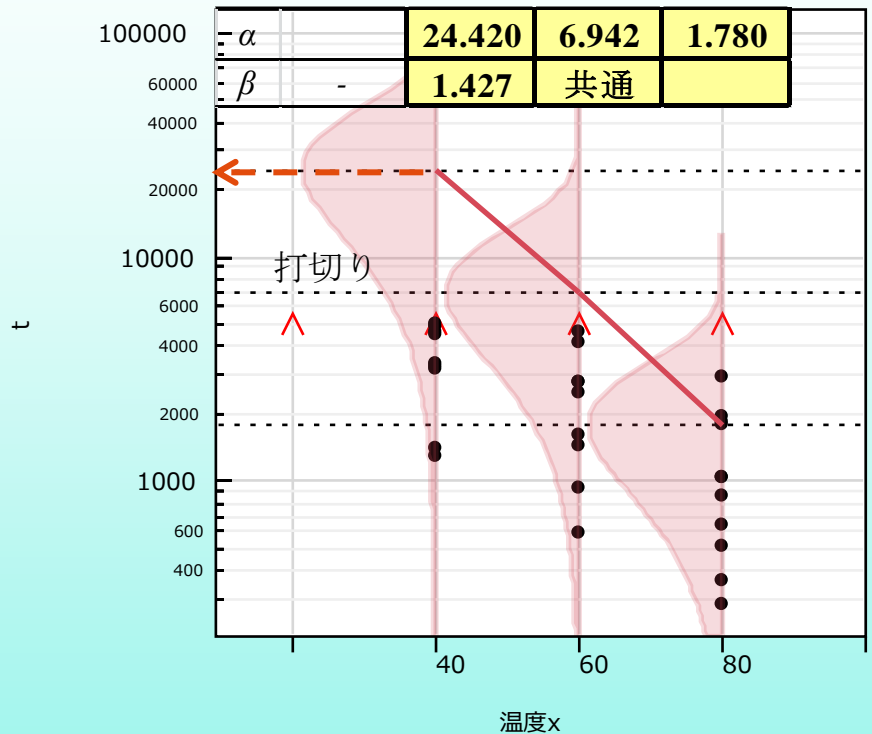
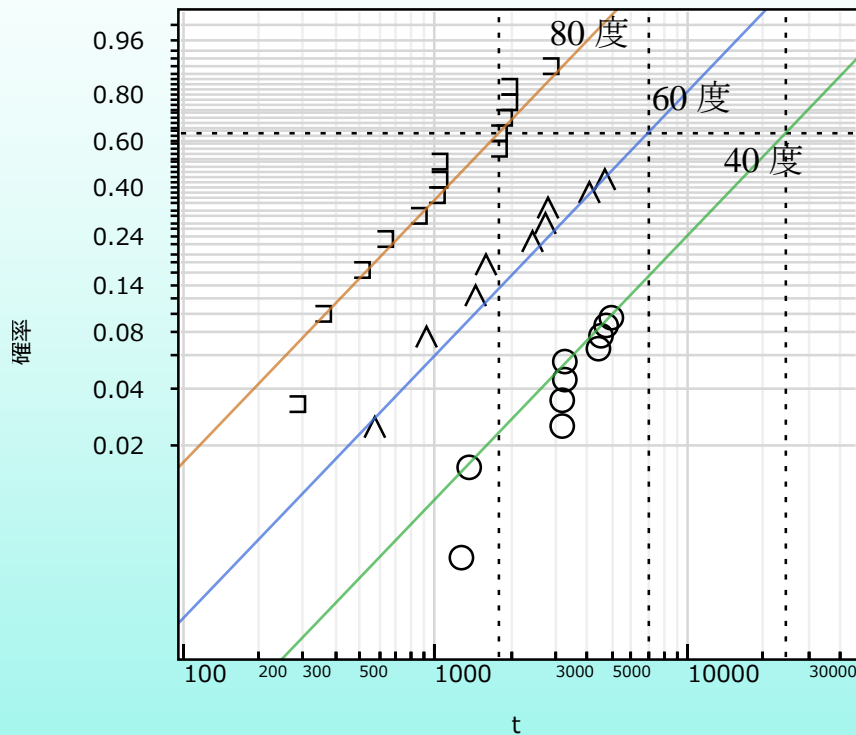
β を共通

$\alpha = \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4$				α	24.420	6.942	1.780	$\ln L_i =$	-95.463
$\beta = \text{共通}$				β	-	1.427	共通		
				群	1	2	3	4	

群	温度	t_{1000}	件数	δ	生存率	変数 x				パラメータ		ワイブル分布			
						x_1	x_2	x_3	x_4	α	β	$f(t)$	$1-F(t)$	Li	$\ln L_i$
1	10	5.000	30	0	1.000	1	0	0	0	-	-	-	-	-	-
2	40	1.298	1	1	0.990	0	1	0	0	24.420	1.427	0.016	0.985	0.016	-4.108
2	40	1.390	1	1	0.980	0	1	0	0	24.420	1.427	0.017	0.983	0.017	-4.081
:															
2	40	4.982	1	1	0.900	0	1	0	0	24.420	1.427	0.027	0.902	0.027	-3.622
2	40	5.000	90	0	0.900	0	1	0	0	24.420	1.427	0.027	0.901	0.901	-9.359
3	60	0.581	1	1	0.950	0	0	1	0	6.942	1.427	0.069	0.971	0.069	-2.671
3	60	0.925	1	1	0.900	0	0	1	0	6.942	1.427	0.082	0.945	0.082	-2.499
:															
4	80	2.884	1	1	0.067	0	0	0	1	1.780	1.427	0.135	0.137	0.135	-2.006
4	80	5.000	1	0	0.067	0	0	0	1	1.780	1.427	0.016	0.013	0.013	-4.365

全て
共通

JMPによる解析 (β を共通)



ワイブル確率プロットで10°Cは表示されない

結果の解釈 (β を共通)

- ◆ 40°Cにおける 5000 時間での故障は, 100 枚中10枚で, 多くは打ち切りデータであり, パラメータの推定は, 不安定である.
- ◆ 他の温度と共通の β を用いることにより, 40°Cの場合の下側確率 0.632 となる推定値 $\hat{\alpha} = 24,420$ 時間と大幅に増加している.
- ◆ 残念ながら, 10°Cでの推定値は得られない.

温度を計量値とした回帰分析

◆ 通常回帰分析

- 誤差は正規分布
- 各温度での分散は一定
- 温度 x と反応(故障時間) y に直線関係

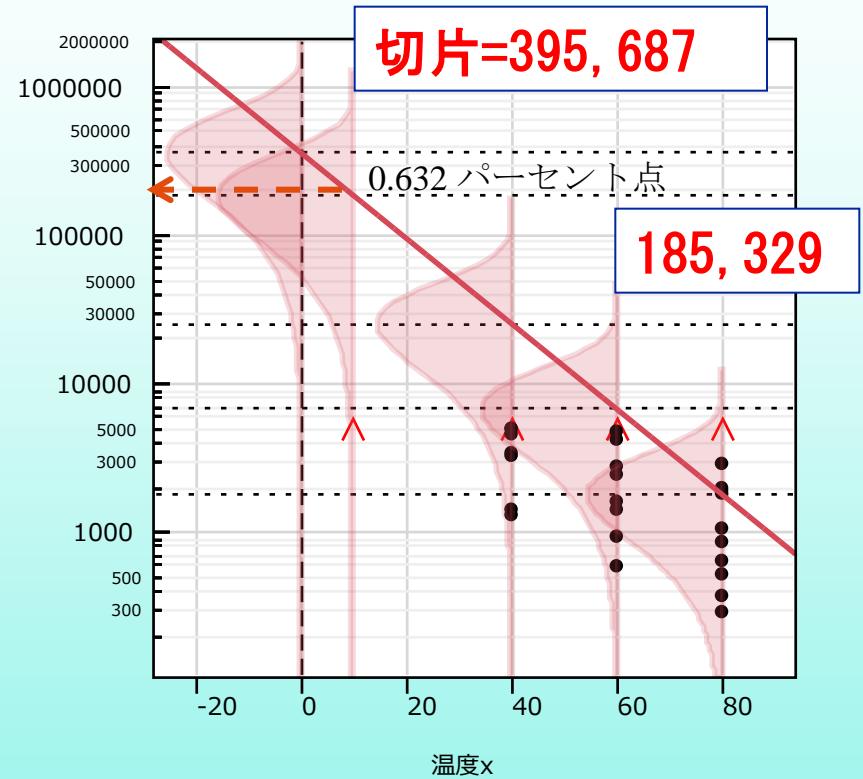
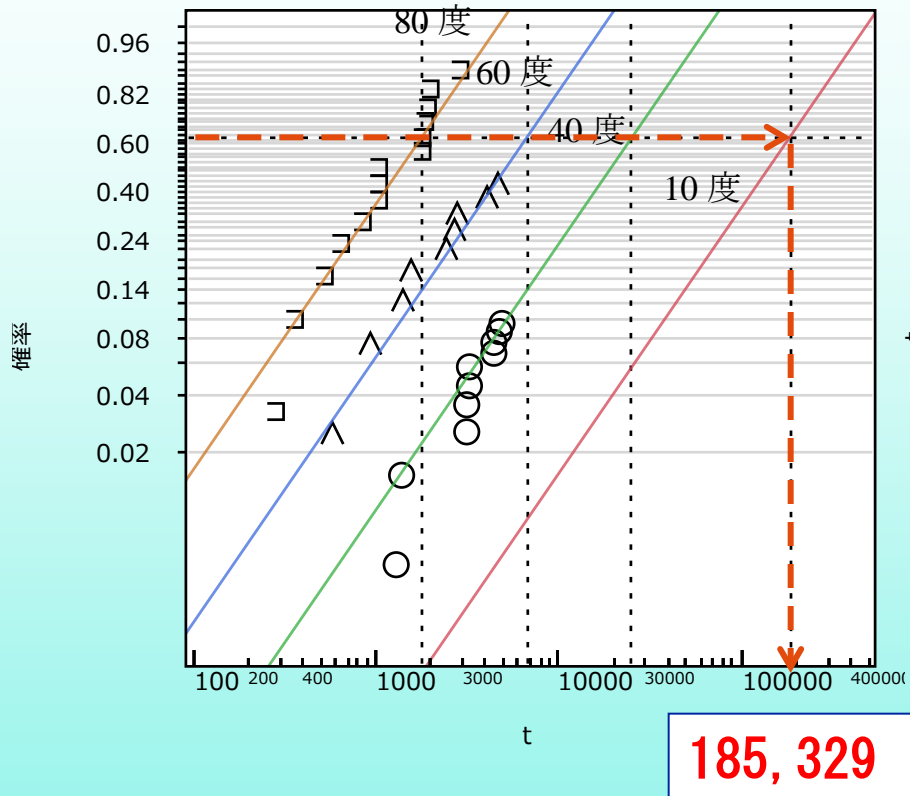
◆ 加速試験データ

- 誤差は、ワイブル分布
- 各温度での分散は一定 (β を共通)
- $\exp(\alpha_j)$ が回帰の推定値となるように

ワイブル回帰

$\alpha_i = \exp(\alpha_{\text{切片}} + \alpha_{\text{傾き}} \text{温度}_i)$						α	$\alpha_{\text{切片}} =$	5.885	$\alpha_{\text{傾き}} =$	-0.066	$\ln L =$	-95.659
						β	共通 $\beta =$	1.426				
変数 x		件	パラメータ			ワイブル分布		尤度				
群	温度	t_{1000}	数	δ	生存率	α	β	$f(t)$	$1-F(t)$	Li	$\ln L_i$	
	0					359.687						
1	10	5.000	30	0	1.000	185.329	1.426	0.002	0.994	0.994	-0.173	
2	40	1.298	1	1	0.990	25.351	1.426	0.016	0.986	0.016	-4.159	
2	40	1.390	1	1	0.980	25.351	1.426	0.016	0.984	0.016	-4.132	
						:						
2	40	4.982	1	1	0.900	25.351	1.426	0.025	0.906	0.025	-3.670	
2	40	5.000	90	0	0.900	25.351	1.426	0.026	0.906	0.906	-8.883	
3	60	0.581	1	1	0.950	6.730	1.426	0.072	0.970	0.072	-2.626	
3	60	0.925	1	1	0.900	6.730	1.426	0.086	0.943	0.086	-2.457	
4	80	2.884	1	1	0.067	1.787	1.426	0.135	0.138	0.135	-2.001	
4	80	5.000	1	0	0.067	1.787	1.426	0.016	0.013	0.013	-4.340	

JMPによる解析(回帰)



10°Cでの推定値がようやく表示

結果の解釈(回帰)

- ◆ 10°Cにおけるパラメータ推定がようやくでき
下側確率 0.632 点は, $\hat{\alpha}_1 = 185,329$ 時間と推定された.
- ◆ 10°Cにおける全数打切りの 5000時間での
下側確率は, 0.006と推定された.
- ◆ 故障率が 0.10 となる時間と95%信頼区間
はどうなるのか. → アレニウス変換の事例
で示す.

アレニウス変換

高温と低温の場合の単位温度での劣化度合が異なる

10°Cの Weibull $\hat{\alpha}_1 = 185.324$ (千) は過少評価

$$\text{アレニウス変換温度} = \frac{1}{k_B T_i} = \frac{11605}{\text{温度}x_i + 273.15}$$

k_B はボルツマン定数： 8.6171×10^{-5} ，逆数は 11605

T_i は絶対温度で $T_i = \text{温度}x_i + 273.15$

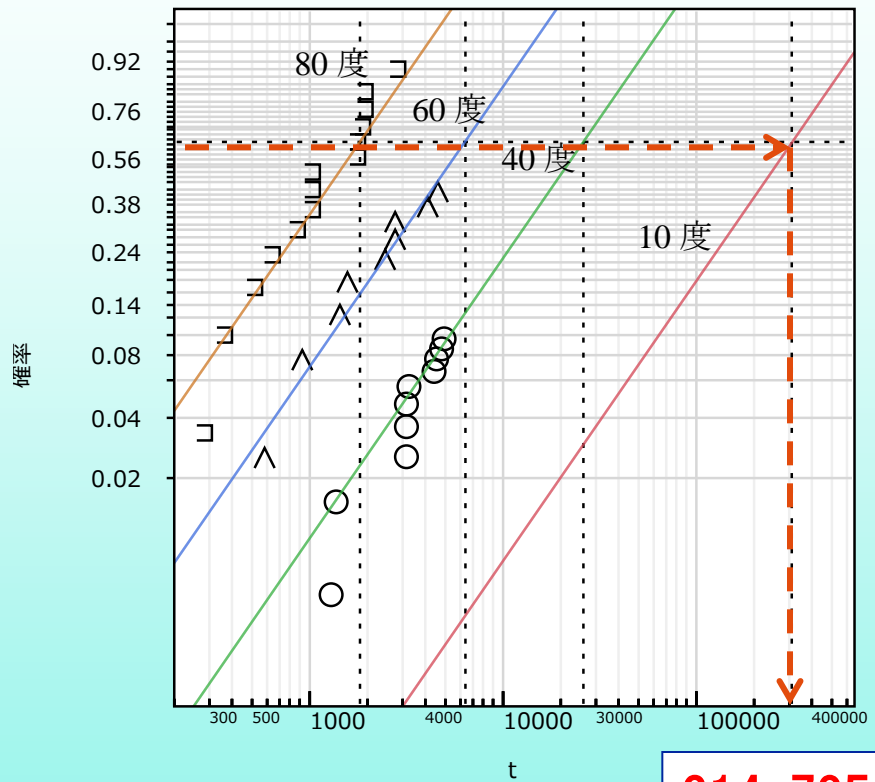
$$\text{回帰式} \quad \alpha_i = \exp\left(\alpha_{\text{切片}} + \alpha_{\text{傾き}} \frac{11605}{\text{温度}x_i + 273.15}\right)$$

アレニウス変換(回帰)

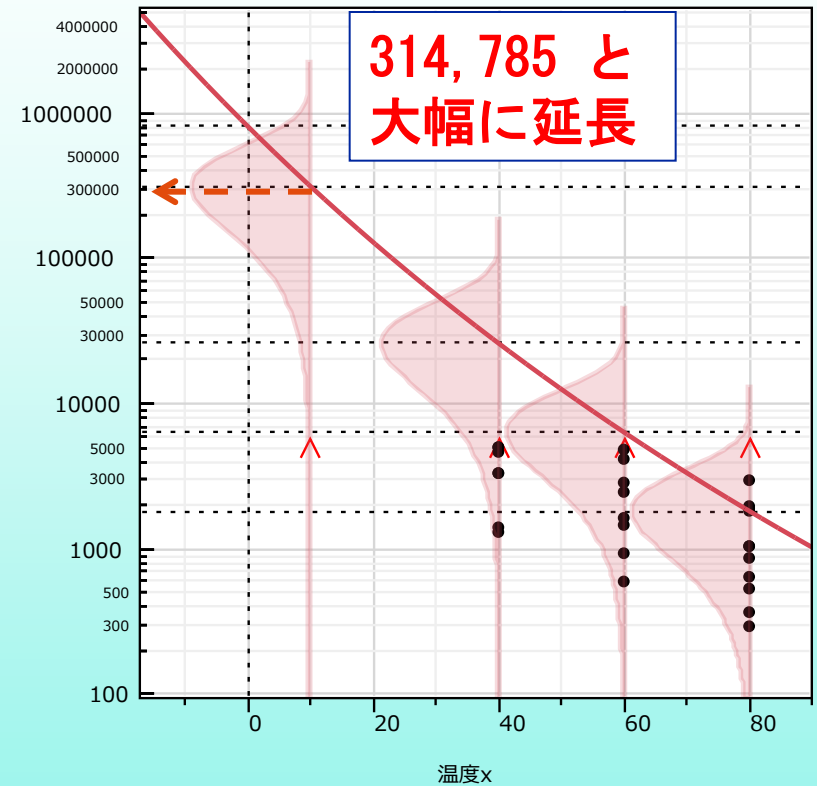
$\alpha = \exp(\alpha_{\text{切片}} + \alpha_{\text{傾き}} \frac{11605}{\text{温度}_i + 273.15})$						α	$\alpha_{\text{切片}} =$	-20.224	$\alpha_{\text{傾き}} =$	0.634	$\ln L =$	-95.663
						β	共通 $\beta =$					
変数 x	アレニウス	件					パラメータ		ワイブル分布		尤度	
群	温度	温度	t_{100}	数	δ	生存率	α	β	$f(t)$	$1-F(t)$	Li	$\ln L_i$
	0	42.5					814.674					
1	10	41.0	5.000	30	0	1.000	314.758	1.414	0.001	0.997	0.997	-0.086
2	40	37.1	1.298	1	1	0.990	26.135	1.414	0.015	0.986	0.015	-4.175
2	40	37.1	1.390	1	1	0.980	26.135	1.414	0.016	0.984	0.016	-4.148
							:					
2	40	37.1	4.982	1	1	0.900	26.135	1.414	0.025	0.909	0.025	-3.699
2	40	37.1	5.000	90	0	0.900	26.135	1.414	0.025	0.908	0.908	-8.675
3	60	34.8	0.581	1	1	0.950	6.380	1.414	0.079	0.967	0.079	-2.533
3	60	34.8	0.925	1	1	0.900	6.380	1.414	0.093	0.937	0.093	-2.372
							:					
4	80	32.9	2.884	1	1	0.067	1.827	1.414	0.139	0.149	0.139	-1.974
4	80	32.9	5.000	1	0	0.067	1.827	1.414	0.018	0.016	0.016	-4.152

切片が-20.224, 傾きが 0.634 となるのは, アレニウス変換で温度の大小が入れ替わるためである.

JMPによる解析(アレニウス変換)



314,785



5. JMPによる寿命の二変量

デバイスAの故障データ(Devault)

Devault - JMP

ファイル(F) 編集(E) テーブル(T) 行(R) 列(C) 実験計画(DOE)(D) 分析(A) グラフ(G) ツール(O) 表示(V) ウィンドウ(W)

時間	ステータス	重み	温度	打ち切りの有無	x
1 5000	Censored	30	10	1	40.9853435
2 1298	Failed	1	40	0	37.0589175
3 1390	Failed	1	40	0	37.0589175
4 3187	Failed	1	40	0	37.0589175
5 3241	Failed	1	40	0	37.0589175
6 1000	Failed	1	40	0	37.0589175
7 1000	Failed	1	80	0	32.8613903
8 1000	Failed	1	80	0	32.8613903
9 1000	Failed	1	80	0	32.8613903
10 1000	Failed	1	80	0	32.8613903
11 1000	Failed	1	80	0	32.8613903
12 1000	Failed	1	80	0	32.8613903
13 1000	Failed	1	80	0	32.8613903
14 1000	Failed	1	80	0	32.8613903
15 1000	Failed	1	80	0	32.8613903
16 1000	Failed	1	80	0	32.8613903
17 1000	Failed	1	80	0	32.8613903
18 1000	Failed	1	80	0	32.8613903
19 1000	Failed	1	80	0	32.8613903
20 1000	Failed	1	80	0	32.8613903
21 1000	Failed	1	80	0	32.8613903
22 1000	Failed	1	80	0	32.8613903
23 1000	Failed	1	80	0	32.8613903
24 1000	Failed	1	80	0	32.8613903
25 1000	Failed	1	80	0	32.8613903
26 1000	Failed	1	80	0	32.8613903
27 1000	Failed	1	80	0	32.8613903
28 1000	Failed	1	80	0	32.8613903
29 1000	Failed	1	80	0	32.8613903
30 1000	Failed	1	80	0	32.8613903
31 1000	Failed	1	80	0	32.8613903
32 1000	Failed	1	80	0	32.8613903
33 1000	Failed	1	80	0	32.8613903
34 1951	Failed	1	80	0	32.8613903
35 1964	Failed	1	80	0	32.8613903
36 2884	Failed	1	80	0	32.8613903
37 5000	Censored	1	80	1	32.8613903

変数名は変更
 時間 → t, t/1000, y=ln(t)
 重み → n
 温度 → 温度x

基本設定パネル

時間は $t/1000$ を選択

寿命の二変量 - JMP

列の選択

- No
- t
- t/1000
- y=ln(t)
- 打ち切り
- n
- 温度x

選択した列に役割を割り当てる

Y, イベントまでの時間	t/1000 オプション(数値)
X	温度x
打ち切り	打ち切り
度数	n
By	オプション

アクション

- OK
- キャンセル
- 削除
- 前回の設定
- ヘルプ

打ち切りの値 1

関係

Arrhenius 摂氏

包含モデルの検定

分布

対数正規

信頼区間の方法

Wald

標準が Arrhenius 摂氏となっていることに注意

標準が対数正規となっていることに注意

標準が Wald となっていることに注意

温度を名義尺度とした場合

列の選択

- No
- t
- t/1000
- $y = \ln(t)$
- 打ち切り
- n
- 温度x

選択した列に役割を割り当てる

Y, イベントまでの時間	t/1000
X	温度x
打ち切り	打ち切り
度数	n
By	オプション

アクション

OK

キャンセル

削除

前回の設定

ヘルプ

打ち切りの値 1

関係

位置と尺度

分布

Weibull

信頼区間の方法

Wald

温度の尺度の設定
これは名義尺度

位置と尺度に自動的に変化

分布を Weibull に変更

温度を連続尺度とする場合

温度の尺度の設定
ここでは連続尺度

線形を選択

分布を Weibull に変更

アレニウス変換

寿命の二変量 - JMP

列の選択

- No
- t
- t/1000
- y=ln(t)
- 打ち切り
- n
- 温度x

選択した列に役割を割り当てる

Y, イベントまでの時間: t/1000
オプション(数値)

X: 温度x

打ち切り: 打ち切り

度数: n

By: オプション

アクション

OK
キャンセル
削除
前回の設定
ヘルプ

打ち切りの値: 1

関係

Arrhenius 摂氏
 包含モデルの検定

分布

Weibull

信頼区間の方法

Wald

温度の尺度の設定
ここでは連続尺度

Arrhenius 摂氏を確認

分布を Weibull に変更

10°Cでの故障確率に対応する寿命

Weibull 結果

統計量 分布 分位点 ハザード 密度 加速係数 カスタム推定

分位点の推定

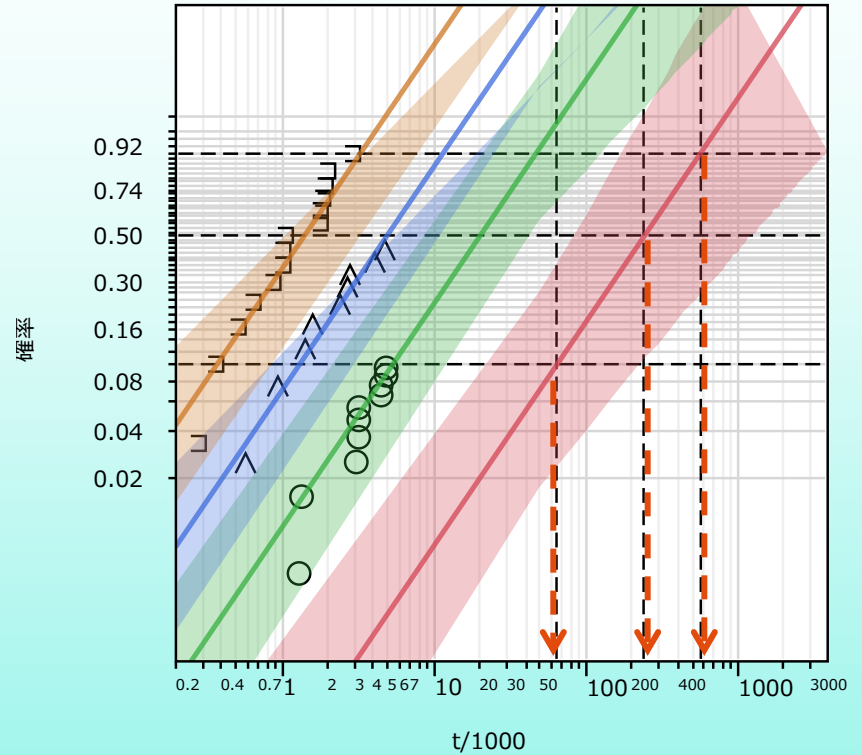
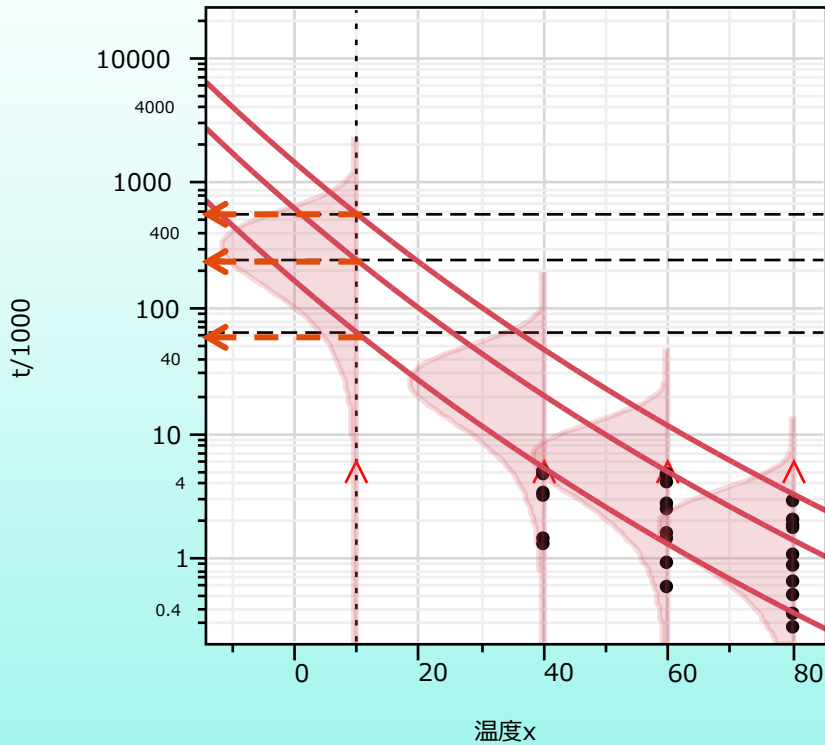
割合	温度x	故障確率	温度x	寿命分位点	寿命分位点 下側95%	寿命分位点 上側 95%
0.10000000	10.000000	0.1000	10.0000	64.1282	22.7122	181.0668
0.50000000	.	0.5000	10.0000	242.9216	68.3592	863.2478
0.90000000	.	0.9000	10.0000	567.6498	133.4407	2414.7518

信頼区間の種類

- Wald信頼区間
- プロファイル信頼区間

95%信頼区間の計算式の考え方は、
スライド85 を参照

推定結果のグラフ表示



故障確率	温度x	寿命分位点
0.1000	10.0000	64.1282
0.5000	10.0000	242.9216
0.9000	10.0000	567.6498

寿命時間を指定した故障確率(10°C)

Weibull 結果

統計量

分布

分位点

ハザード

密度

加速係数

カスタム推定

分位点の推定

確率の推定

t/1000	温度x	t/1000	温度x	故障確率	故障確率 下側95%	故障確率 上側 95%
10.00000	10.000000	10.0000	10.0000	0.0076	0.0021	0.0270
30.00000	.	30.0000	10.0000	0.0353	0.0093	0.1290
300.00000	.	300.0000	10.0000	0.6071	0.1361	0.9974
500.00000	.	500.0000	10.0000	0.8540	0.2276	1.0000

+

-

信頼区間の種類

Wald信頼区間

プロファイル信頼区間

95%信頼区間の計算式の考え方は、

スライド84 を参照

Arrhenius 摂氏 (温度x)

- ◆ Arrhenius 摂氏 (温度x) を選択した場合
- ◆ 散布図上は「直線」、X軸が等差ではなく、Arrhenius 目盛となる。

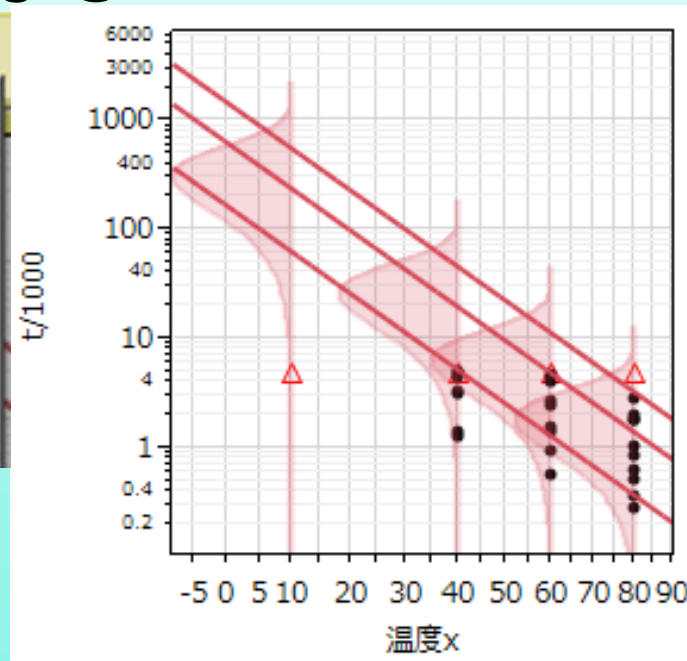
関係

Arrhenius 摂氏

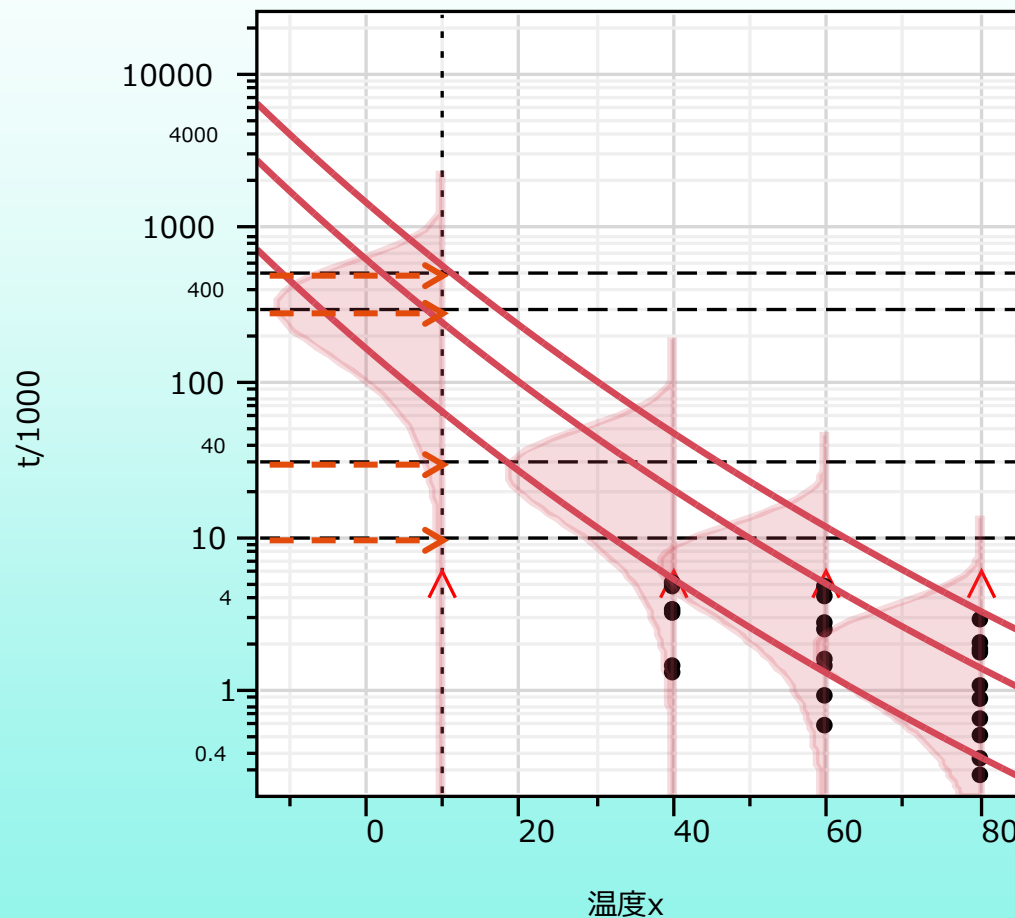
包含モデルの検定

散布図

- 密度曲線の追加
- 密度曲線の削除
- 密度曲線の表示
- 分位点曲線の追加
- 分位点曲線の削除
- 軸の転置
- 変換スケールの使用



10°Cにおける故障率の推定



t/1000	温度x	故障確率
10.0000	10.0000	0.0076
30.0000	10.0000	0.0353
300.0000	10.0000	0.6071
500.0000	10.0000	0.8540

散布図

- 密度曲線の追加
- 密度曲線の削除
- 密度曲線の表示
- 分位点曲線の追加
- 分位点曲線の削除
- 軸の転置
- 変換スケールの使用

チェックを外すと
曲線となる

6. 最小極値分布 (必須の予備知識)

ワイブル分布は簡単に
最小極値分布へ変換

なぜ最小極値分布

ワイブル分布は、時間 t の関数で理解しやすい

ワイブル分布の時間 t について $y = \ln(t)$ と自然対数

Weibull α も自然対数 $\mu_{\text{SEV}} = \ln(\alpha)$, $\alpha = \exp(\mu_{\text{SEV}})$

Weibull β の逆数を $\sigma_{\text{SEV}} = 1/\beta$, $\beta = 1/\sigma_{\text{SEV}}$

正規分布と同様の統計的な性質も持つ

最小極値分布 (SEV : Smallest Extreme Value Distribution)

ワイブルを最小極値分布に変換

$$\begin{aligned} F(t) &= 1 - \exp \left[- \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right] \\ &= 1 - \exp \left[- \left(\frac{t}{\exp(\mu)} \right)^{1/\sigma} \right] \\ &= 1 - \exp \left\{ - \exp \left[\ln \left(\frac{t}{\exp(\mu)} \right)^{1/\sigma} \right] \right\} \\ &= 1 - \exp \left[- \exp \left(\frac{\ln(t) - \mu}{\sigma} \right) \right] \end{aligned}$$

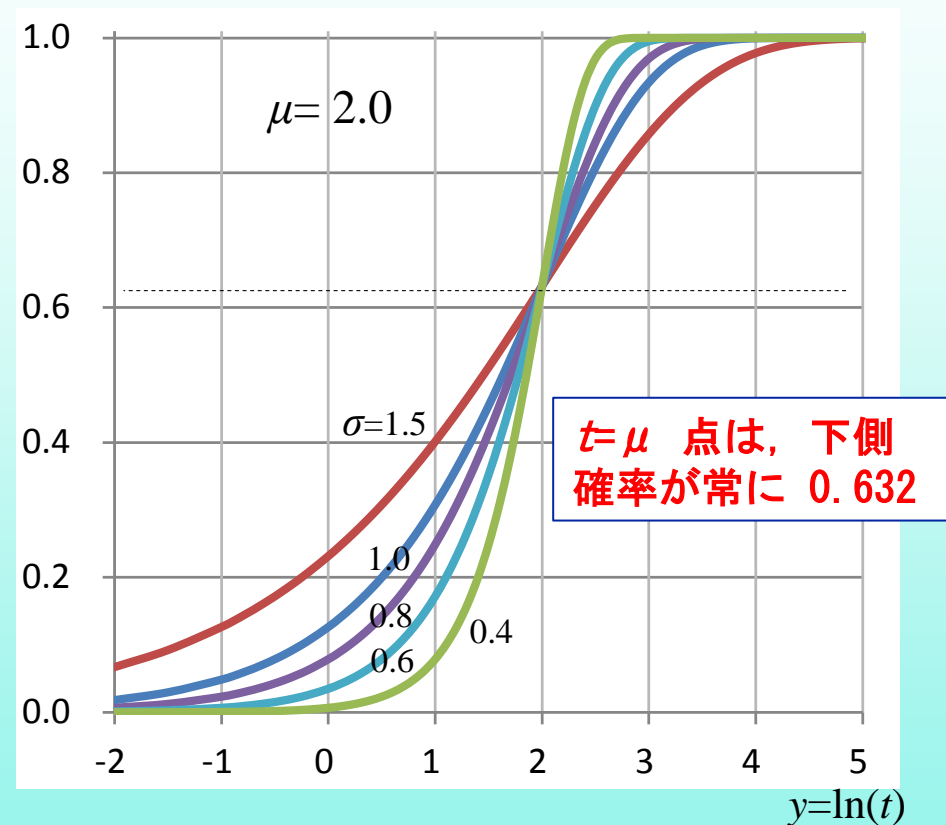
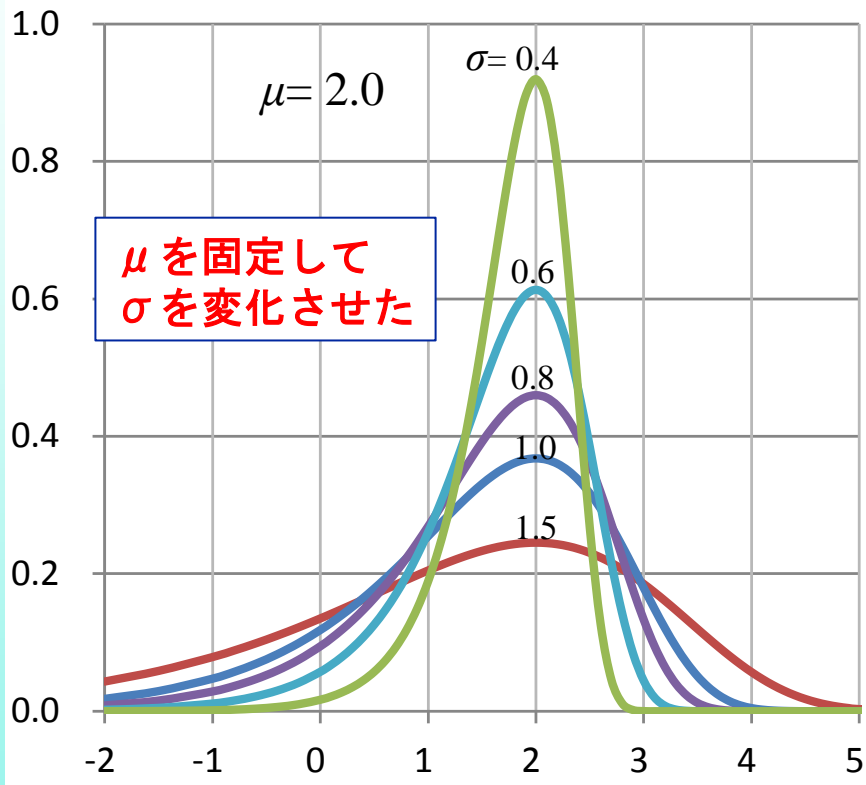
SEV: 確率密度関数

$$f(y) = \frac{1}{\sigma} \cdot \exp\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right) \cdot \exp\left\{-\exp\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right)\right\}$$

確率密度関数の最大値は、 μ の位置

$\sigma = 1.0$ の場合には、左に裾は引くものの
正規分布の確率密度関数の形状に近い

最小極値は対数正規と同様



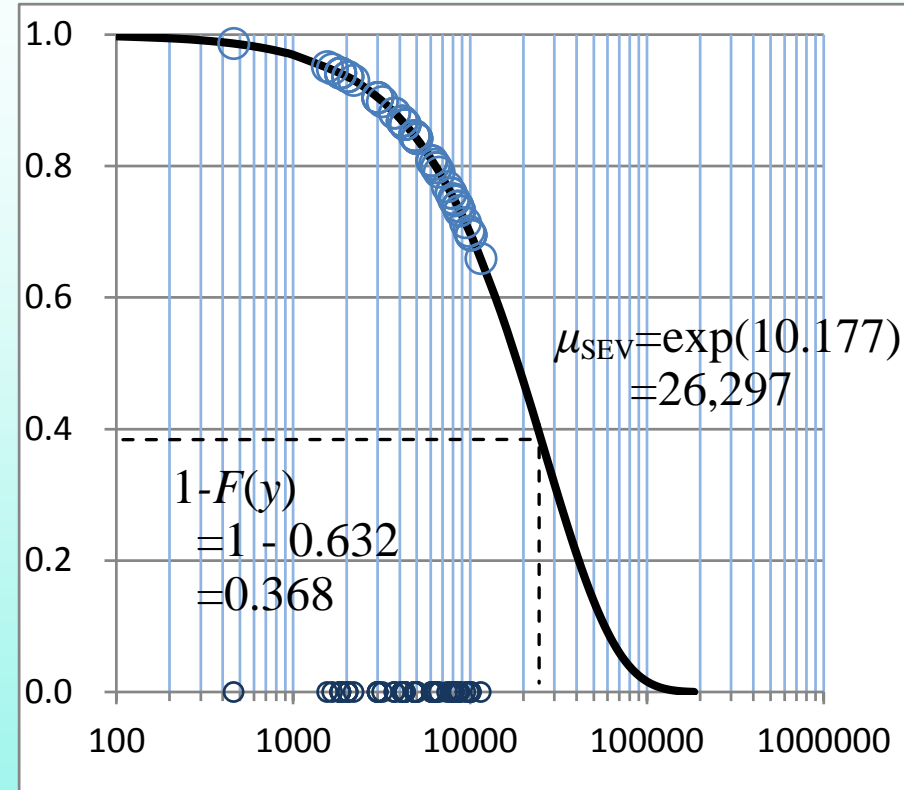
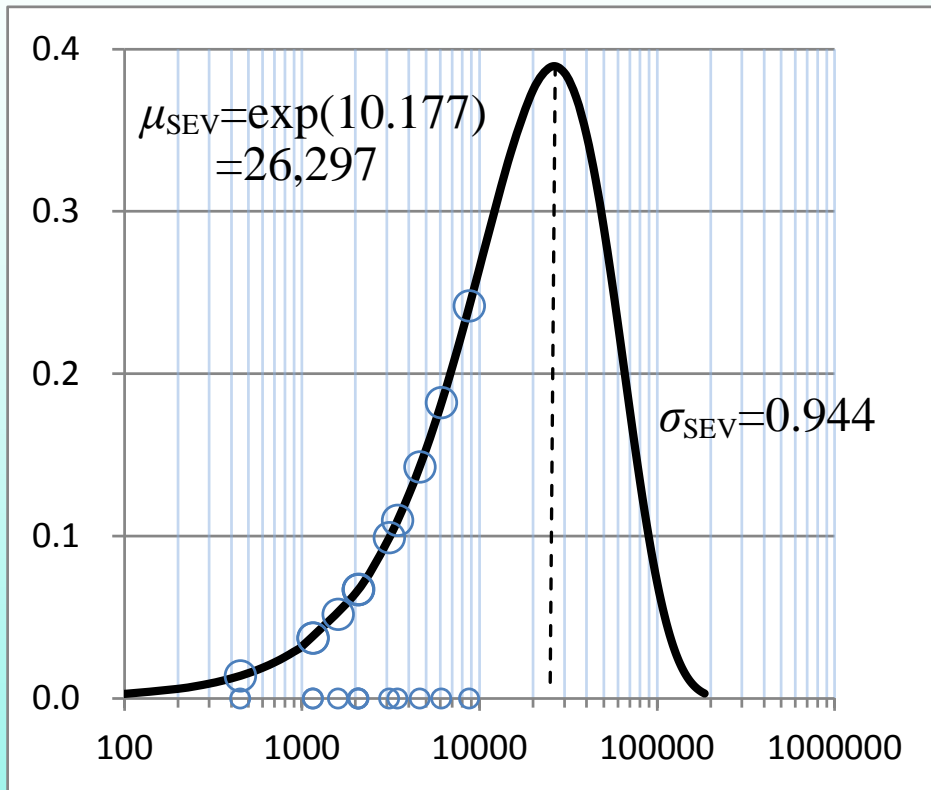
多くの別表現, JMP内でも同様

ワイブル分布	JMP a: 生存時間分析	α	β	閾値
	JMP b: 寿命の一変量	Weibull: α	Weibull: β	閾値
	奥野(Nelson)	尺度: α	形状: β	シフト: γ
	日本の信頼性	尺度: η	形状: m	位置: γ
	Excel	β	α	
最小極値分布	JMP c: 生存時間分析	$\lambda = \ln(\alpha)$	$\delta = 1/\beta$	
	JMP d: 寿命の一変量	位置: location	尺度: scale	
	JMP e: 寿命の二変量	位置: $\mu = \ln(\alpha)$	尺度: $\sigma = 1/\beta$	
	奥野監訳本(Nelson)	位置: $\lambda = \ln(\alpha)$	尺度: $\delta = 1/\beta$	
	日本の信頼性	位置: u	尺度: $\alpha = 1/\beta$	

最小極値分布を用いた最尤法

		$\mu_{SEV} =$	10.177					$\ln L =$	-42.2480
		$\sigma_{SEV} =$	0.9448					$-2 \ln L =$	84.4960
No	t	$y = \ln(t)$	$(y - \mu) / \sigma$	δ	$f(y)$	$1 - F(y)$	Li	$\ln Li$	
1	450	6.109	-4.306	1	0.0141	0.9866	0.0141	-4.2624	
3	1150	7.048	-3.313	1	0.0372	0.9642	0.0372	-3.2922	
:									
45	6100	8.716	-1.547	1	0.1822	0.8082	0.1822	-1.7027	
62	8750	9.077	-1.165	1	0.2417	0.7320	0.2417	-1.4199	
2	460	6.131	-4.282	+ 0	0.0144	0.9863	0.9863	-0.0138	
5	1560	7.352	-2.990	+ 0	0.0506	0.9509	0.9509	-0.0503	
:									
69	10100	9.220	-1.013	+ 0	0.2673	0.6955	0.6955	-0.3632	
70	11500	9.350	-0.875	+ 0	0.2907	0.6592	0.6592	-0.4167	
:									
$f(y) = (1 / \sigma_{SEV}^5) * \text{EXP}(\sigma_{SEV}^7) * \text{EXP}(-\text{EXP}(\sigma_{SEV}^7))$									
$Li = \text{IF}((G7=1), H7, I7)$									
$1 - F(y) = \text{EXP}(-\text{EXP}(\sigma_{SEV}^7))$									
$Li = \text{IF}((G7=1), H7, I7)$									
$f(y) = (1 / \sigma_{SEV}^5) * \text{EXP}(\sigma_{SEV}^7) * \text{EXP}(-\text{EXP}(\sigma_{SEV}^7))$									
$1 - F(y) = \text{EXP}(-\text{EXP}(\sigma_{SEV}^7))$									

最小極値分布のあてはめ結果



ワイブル分布のスライド37と対応している。

$$\hat{\alpha} = 26,296$$
$$\hat{\beta} = 1.058, \text{ 逆数 } \sigma = 0.944$$

各種の推定

t	y	$F(y)=P$		P	y_P	t_P
8000	8.987	0.247		0.100	8.051	3137
80000	11.290	0.961		0.500	9.831	18600
$F(t) = 1 - \exp\left\{-\exp\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right)\right\}$				0.900	10.965	57823
				0.950	11.214	74144
				0.975	11.410	90255
						$y_p = \sigma \cdot \ln\{-\ln(1 - P)\} + \mu$

時間ごとの故障率
(分布関数の使用)

故障までの時間
(y について解いた式)

分散共分散の推定 $(-Z)^{-1}$

対数

尤度関数

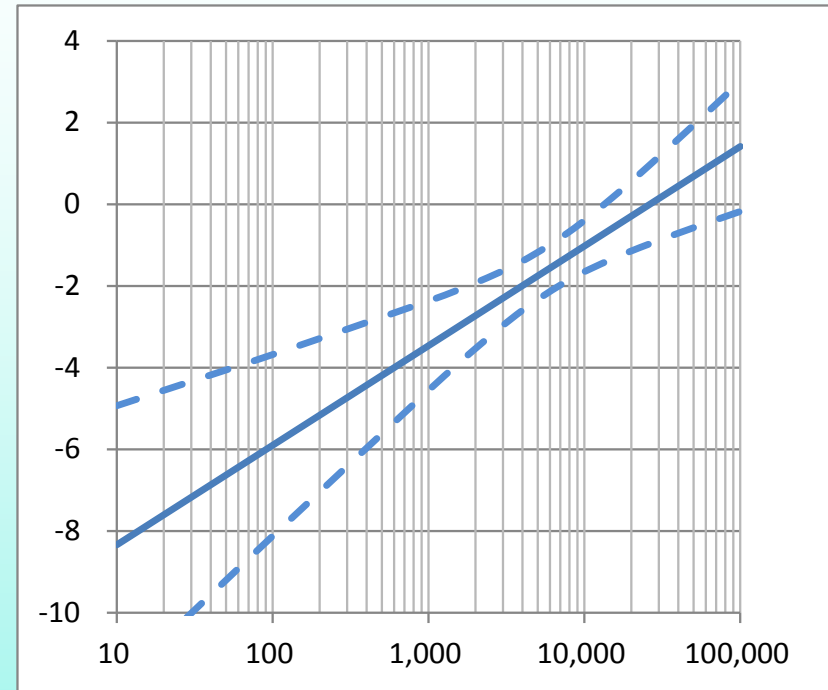
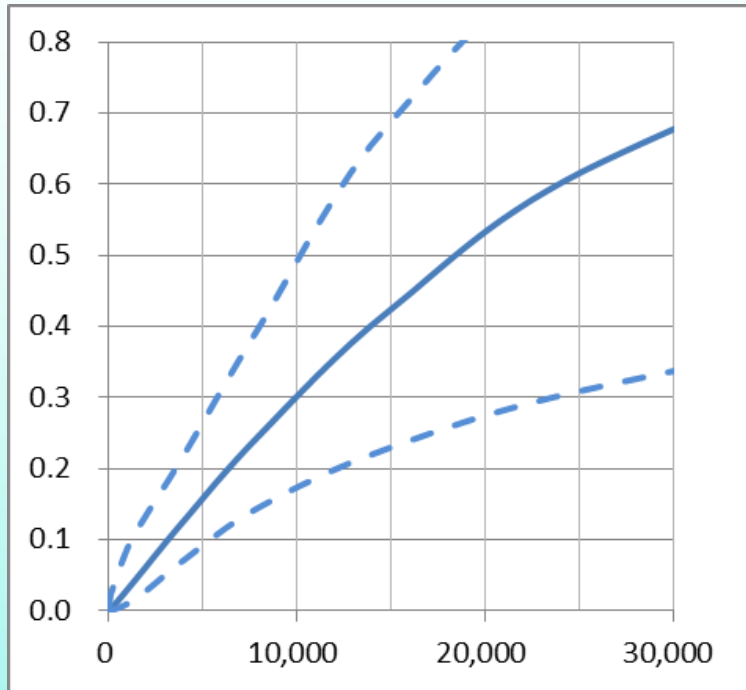
$$\ln L_i = \ln \left[\frac{1}{\sigma} \cdot \exp \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{\delta_i} + \ln \left[\exp \left\{ -\exp \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right) \right\} \right]$$

$$= \delta_i \left(-\ln(\sigma) + \frac{y_i - \mu}{\sigma} \right) - \exp \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right)$$

							Z		$\Sigma = (-Z)^{-1}$		SE	
					$\mu^{\wedge} =$	10.177	-13.4437	21.2070	0.2171	0.0904	0.4659	
					$\sigma^{\wedge} =$	0.9448	21.2070	-50.8951	0.0904	0.0573	0.2394	
No	t	y	u	u/σ	u/σ ²	δ	∂μ	∂σ	∂μ ∂μ	∂μ ∂σ	∂σ ∂σ	∂σ ∂μ
1	450	6.109	-4.306	-4.56	-4.82	1	-1.0442	3.4374	-0.0151	1.1703	-8.6772	1.1703
2	1150	7.048	-3.313	-3.51	-3.71	1	-1.0199	2.3201	-0.0408	1.2147	-6.4794	1.2147
⋮												
69	10100	9.220	-1.013	-1.07	-1.13	0	0.3844	-0.3893	-0.4069	0.0052	0.4068	0.0052
70	11500	9.350	-0.875	-0.93	-0.98	0	0.4410	-0.3861	-0.4668	-0.0581	0.4596	-0.0581
計	344440	580.56	-139.55	-147.70	-156.34	12	0.0000	0.0000	-13.4437	21.2070	-50.8951	21.2070

それぞれの $\ln L_i$ について偏微分し、和を計算した結果をZのセルに代入。負のZの逆行列が分散共分散となる。

時間 t での95%信頼区間

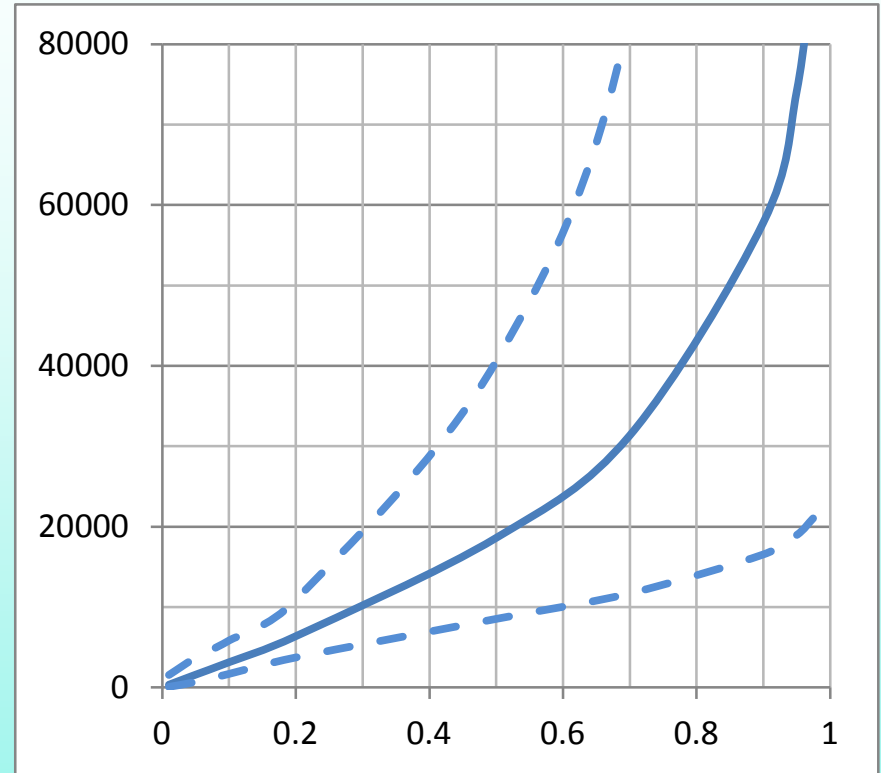
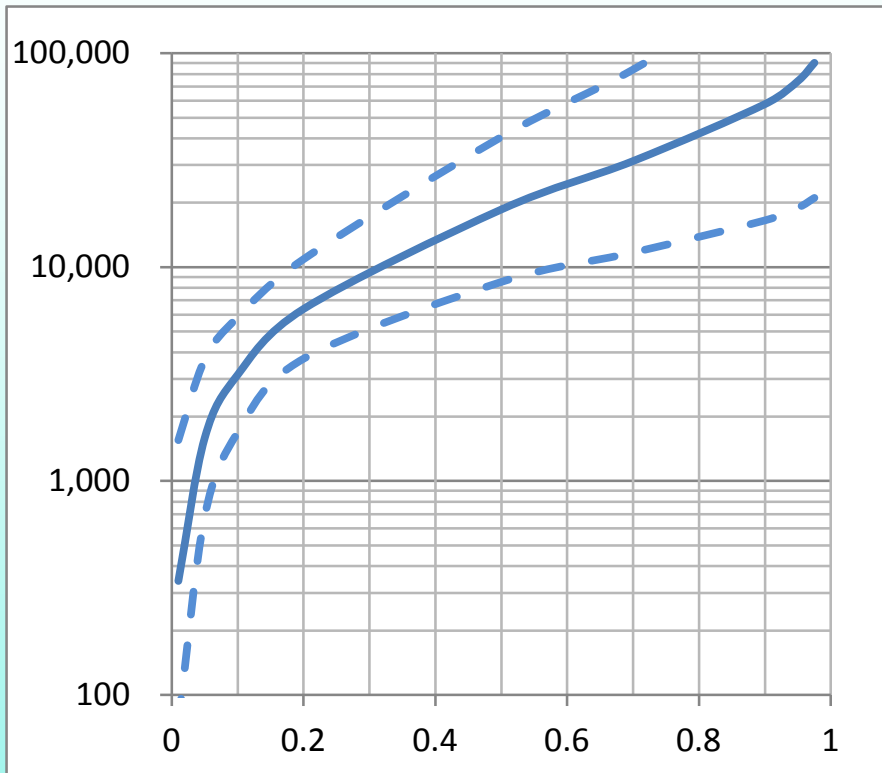


$$Var(\hat{u}) = \left(\frac{1}{\hat{\sigma}_{SEV}} \right)^2 \left[Var(\hat{\mu}_{SEV}) + 2u Cov(\hat{\mu}_{SEV}, \hat{\sigma}_{SEV}) + u^2 Var(\hat{\sigma}_{SEV}) \right]$$

$$\underline{u} = u - 1.96\sqrt{Var(u)}, \quad \tilde{u} = u + 1.96\sqrt{Var(u)}$$

$$F(\underline{y}) = 1 - \exp\{-\exp(\underline{u})\}, \quad F(\tilde{y}) = 1 - \exp\{-\exp(\tilde{u})\}$$

故障率に対する95%信頼区間



$$Var(y_P) = Var(\hat{\mu}) + 2u_P Cov(\hat{\mu}, \hat{\sigma}) + u_P^2 Var(\hat{\sigma})$$

$$\tilde{y}_P = y_P - 1.96\sqrt{Var(y_P)}, \quad \tilde{y}_P = y_P + 1.96\sqrt{Var(y_P)}$$

Newton-Raphson法

- ◆ 対数尤度 $\ln L$ について 2 階の偏微分
- ◆ Excelのソルバーで最尤解の計算
 - 分散共分散が計算される
- ◆ 最尤法の逐次計算: Newton-Raphson法
 - Excelのソルバーに頼ることなく
 - Excelの基本機能だけで
 - Newton-Raphson法による逐次計算の実施

分散共分散行列の活用

			元の	新たな	1階の		2階の偏微分		負の逆行列			
			パラメータ	パラメータ	偏微分	Z		(-Z) ⁻¹				
Weible a =			26.2968	26.2968	0.0000	-0.0194	-0.7198	150.0975	-2.6645			
Weible β =			1.0584	1.0584	0.0000	-0.7198	-40.5510	-2.6645	0.0720			
				ln L = -52.26	-2 ln L = 104.52							
No	t ₁₀₀₀ +	d	f(t)	1-F(t)	Li	ln Li	∂ a	∂ β	∂ a ∂ a	∂ a ∂ β	∂ β ∂ β	
1	0.450	1	0.031	0.987	0.031	-3.464	-0.040	-3.068	0.0015	-0.0397	-1.1159	
2	0.460 +								56	0.0000	-0.0017	-0.2260
3	1.150								71	0.0014	-0.0412	-1.2494
4	1.150								71	0.0014	-0.0412	-1.2494
			$\begin{bmatrix} \alpha \text{ の変化量} \\ \beta \text{ の変化量} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial^2 \alpha} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta \partial \alpha} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial^2 \beta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \beta} \end{bmatrix}$									
69	10.100 +								48	-0.0011	-0.0002	-0.3326
70	11.500 +								45	-0.0013	0.0020	-0.2850
			計		-52.260	0.000	0.000	-0.019	-0.720	-40.551		

1階の偏微分式を追加，変化量の計算を追加

逐次計算の例示

変化量が 0 ではないので解が求まっていない状態

	元の パラメータ	変化量	新たな パラメータ	1階の 偏微分	2階の偏微分 Z	負の逆行列 $(-Z)^{-1}$
Weible $\alpha =$	26.0000	0.5035	26.5035	0.0480	-0.0214 -0.7137	98.1725 -1.5485
Weible $\beta =$	1.0000	0.0521	1.0521	2.7172	-0.7137 -45.2442	-1.5485 0.0465

新たなパラメータをコピー
元のパラメータに「値」をペースト

逐次的な変化過程

	元の パラメータ	変化量	新たな パラメータ
Weible $\alpha =$	26.5035	-0.2061	26.2974
Weible $\beta =$	1.0521	0.0063	1.0584

1 回目の置き換え

	元の パラメータ	変化量	新たな パラメータ
Weible $\alpha =$	26.2974	-0.0006	26.2968
Weible $\beta =$	1.0584	0.0001	1.0584

2 回目の置き換え

	元の パラメータ	変化量	新たな パラメータ
Weible $\alpha =$	26.2968	0.0000	26.2968
Weible $\beta =$	1.0584	0.0000	1.0584

3 回目に変化量が 0

7. 回帰分析の拡張

誤差をワイブル分布と仮定
(計算上は最小極値分布を仮定)

最小2乗法による回帰分析

最小2乗法による回帰分析

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_p x_{pi} + \varepsilon_i,$$

誤差 ε_i が独立に平均が0の正規分布に従うと仮定

次式により

$$\hat{\varepsilon}_i = y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1i} + \hat{\beta}_2 x_{2i} + \cdots + \hat{\beta}_p x_{pi}),$$

誤差項を事後的に推定し，分散を推定

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2}{n - p - 1},$$

最尤法による回帰分析

誤差項に標準正規分布の確率密度関数 ϕ_{NOR}

$$\text{尤度 } L_i = \frac{1}{\sigma_{\text{NOR}}} \phi_{\text{NOR}} \left(\frac{y_i - \hat{y}_i}{\sigma_{\text{NOR}}} \right)$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1i} + \hat{\beta}_2 x_{2i} + \cdots + \hat{\beta}_p x_{pi}$$

尤度 L_i の積和を最大化, $\hat{\sigma}_{\text{NOR}}, \hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_p$ を推定

$$L = \prod_{i=1}^n L_i = \prod_{i=1}^n \left[\frac{1}{\sigma_{\text{NOR}}} \phi_{\text{NOR}} \left(\frac{y_i - \hat{y}_i}{\sigma_{\text{NOR}}} \right) \right]$$

標準偏差 $\hat{\sigma}_{\text{NOR}}$ も同時に推定

打切りがある場合

$$y_i = \ln(t_i)$$

$$\text{対数正規分布 : } L_i = \frac{1}{\sigma_{\text{NOR}}} \phi_{\text{NOR}} \left(\frac{y_i - \hat{y}_i}{\sigma_{\text{NOR}}} \right)^{\delta_i} \left[1 - \Phi_{\text{NOR}} \left(\frac{y_i - \hat{y}_i}{\sigma_{\text{NOR}}} \right) \right]^{1-\delta_i}$$

$$\text{最小極値分布 : } L_i = \frac{1}{\sigma_{\text{SEV}}} \phi_{\text{SEV}} \left(\frac{y_i - \hat{y}_i}{\sigma_{\text{SEV}}} \right)^{\delta_i} \left[1 - \Phi_{\text{SEV}} \left(\frac{y_i - \hat{y}_i}{\sigma_{\text{SEV}}} \right) \right]^{1-\delta_i}$$

$$\Phi_{\text{SEV}} = F(y_i) = 1 - \exp \left\{ -\exp \left(\frac{y_i - \hat{y}_i}{\sigma_{\text{SEV}}} \right) \right\}$$

類似の尤度関数

$$\phi_{\text{SEV}} = \exp(u_i) \cdot \exp[-\exp(u_i)] \quad , \quad f(y_i) = \frac{1}{\sigma_{\text{SEV}}} \phi_{\text{SEV}}$$

最小極値分布を誤差とした回帰分析

							$\beta_{\text{切片}} =$	$\beta_{\text{傾き}} =$	$\ln L =$				
$y_i = \beta_{\text{切片}} + \beta_{\text{傾き}} \text{温度} x_i$							5.885	-0.0663	-77.3611				
							$\sigma =$	0.7011					
変数 x				件				パラメータ		最小極値分布		尤度	
群	温度	t_{1000}	$y = \ln(t)$	数	δ	生存率	y^{\wedge}_i	u^{\wedge}_i	$f(y)$	$1-F(y)$	Li	$\ln L_i$	
	0						5.885						
1	10	5.000	1.609	30	0	1.000	5.222	-5.153	0.008	0.994	0.994	-0.173	
2	40	1.298	0.261	1	1	0.990	3.233	-4.239	0.020	0.986	0.020	-3.899	
2	40	1.390	0.329	1	1	0.980	3.233	-4.142	0.022	0.984	0.022	-3.802	
							:						
2	40	4.982	1.606	1	1	0.900	3.233	-2.321	0.127	0.906	0.127	-2.064	
2	40	5.000	1.609	90	0	0.900	3.233	-2.316	0.128	0.906	0.906	-8.884	
3	60	0.581	-0.543	1	1	0.950	1.907	-3.494	0.042	0.970	0.042	-3.169	
3	60	0.925	-0.078	1	1	0.900	1.907	-2.831	0.079	0.943	0.079	-2.535	
							:						
4	80	2.884	1.059	1	1	0.067	0.580	0.683	0.390	0.138	0.390	-0.942	
4	80	5.000	1.609	1	0	0.067	0.580	1.468	0.081	0.013	0.013	-4.340	

JMPを用いた場合

寿命の二変量 - JMP

列の選択

- No
- t
- t/1000
- y=ln(t)
- 打ち切り
- n**
- 温度x
- x0
- x1
- x2

選択した列に役割を割り当てる

Y, イベントまでの時間	y=ln(t) オプション(数値)
X	温度x
打ち切り	打ち切り
度数	n
By	オプション

アクション

OK
キャンセル
削除
前回の設定
ヘルプ

打ち切りの値 1

関係

線形
 包含モデルの検定

分布

最小極値

信頼区間の方法

Wald

y は自然対数 $\ln(t)$

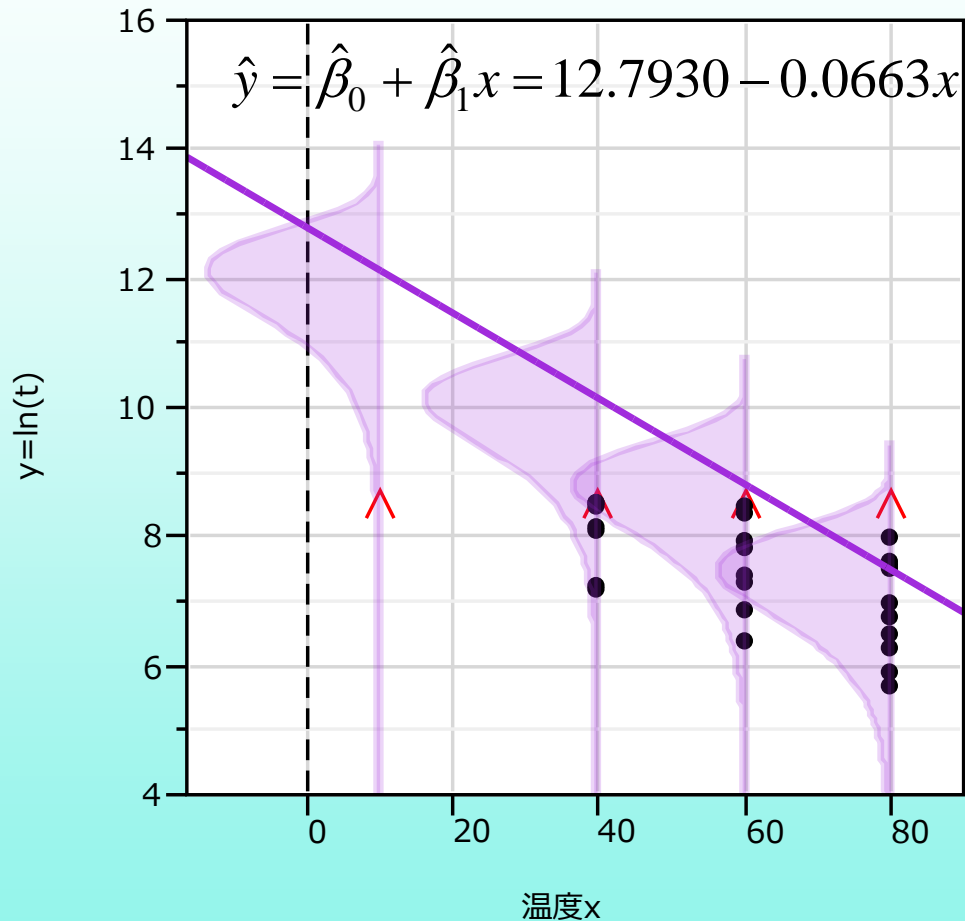
最小極値 とする

JMPでは, どのような組み合わせでも計算が行われる. 基礎知識がないと「誤用」を誘発する

2015.3.6 高橋行雄

94

最小極値分布を誤差とする回帰直線



時間 t : ワイブル分布
対数 $\ln(t)$: 最小極値分布
回帰係数 : 同じ結果
ワイブル分布を使っても
結果は,
<<最小極値分布>>

推定された回帰パラメータが
理解しやすいような Y 軸の
目盛となっている。

ワイブルも最小極値も同じ結果

最小極値分布を誤差：パラメータおよび分散共分散行列の推定

パラメータ	推定値	標準誤差	下側95%	上側95%	β_0	β_1	σ
β_0	12.7930	0.6849	11.4506	14.1354	0.4691	-0.0067	0.0514
β_1	-0.0663	0.0100	-0.0859	-0.0468	-0.0067	0.0001	-0.0007
σ	0.7011	0.1018	0.5016	0.9006	0.0514	-0.0007	0.0104

切片は, $\exp(12.7930) = 359,690$

ワイブル分布を誤差：パラメータおよび分散共分散の推定

パラメータ	推定値	標準誤差	下側95%	上側95%	β_0	β_1	σ
β_0	12.7930	0.6849	11.4506	14.1354	0.4691	-0.0067	0.0514
β_1	-0.0663	0.0100	-0.0859	-0.0468	-0.0067	0.0001	-0.0007
σ	0.7011	0.1018	0.5016	0.9006	0.0514	-0.0007	0.0104

$\mu = 12.793 - 0.06631011 * \text{温度}$

Excel による分散共分散の推定

◆ 最小極値の分散共分散

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial^2 \mu} & -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu \partial \sigma} \\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma \partial \mu} & -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial^2 \sigma} \end{bmatrix}^{-1}$$

◆ 回帰分析への拡張

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & 1 \\ x & x^2 & x \\ 1 & x & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial^2 \mu} & -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial^2 \mu} & -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma \partial \mu} \\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial^2 \mu} & -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial^2 \mu} & -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma \partial \mu} \\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma \partial \mu} & -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma \partial \mu} & -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial^2 \sigma} \end{bmatrix}^{-1}$$

セルごとの掛け算

8. 尤度を用いた95%信頼区間

2種類の 95%信頼区間

- ◆ 最近追加されたのJMP
 - 「寿命の一変量」および「寿命の二変量」
- ◆ 95%信頼区間の計算法
 - Wald法 または 尤度法 が選択できる
 - 以前からある「生存時間分析」は 尤度を用いた結果のみ
- ◆ これまでWald法による結果を示してきた
 - 尤度法 とはどのような計算方法なのか例示する

JMPでの切り替え

寿命の一変量 - JMP

列の選択

- No
- t
- t/1000
- $y = \ln(t)$
- + 動作
- 打ち切り

打ち切りの値 1

信頼区間の方法

尤度 **Wald を尤度に**

選択した列に役割を割り当てる

Y. イベントまでの時間	t オプション(数値)
打ち切り	打ち切り
故障原因	オプション
度数	オプション(数値)
ラベル	オプション
By	オプション

アクション

OK
キャンセル
削除
前回の設定
ヘルプ

ディーゼル発電機ファン

ワイブル・パラメータの尤度による信頼区間の計算（尤度法）

パラメータ	推定	標準誤	下側95%	上側95%	(L95+U95)/2	推定値との差
位置	10.1772	0.4659	9.5201	11.5720	10.5461	-0.3689
尺度	0.9448	0.2394	0.6032	1.6502	1.1267	-0.1819
Weibull α	26296.8452	12251.4283	13631.2390	106086.921	59859	-33562
Weibull β	1.0584	0.2683	0.6060	1.6579	1.1320	-0.0736

ワイブル・パラメータの推定（Wald 法）

パラメータ	推定	標準誤	下側95%	上側95%	(L95+U95)/2	推定値との差
位置	10.1772	0.4659	9.2641	11.0903	10.1772	0
尺度	0.9448	0.2394	0.4755	1.4141	0.9448	0
Weibull α	26296.8452	12251.4283	10552.0697	65534.4483	38043	-11746
Weibull β	1.0584	0.2683	0.7072	2.1031	1.4052	-0.3468

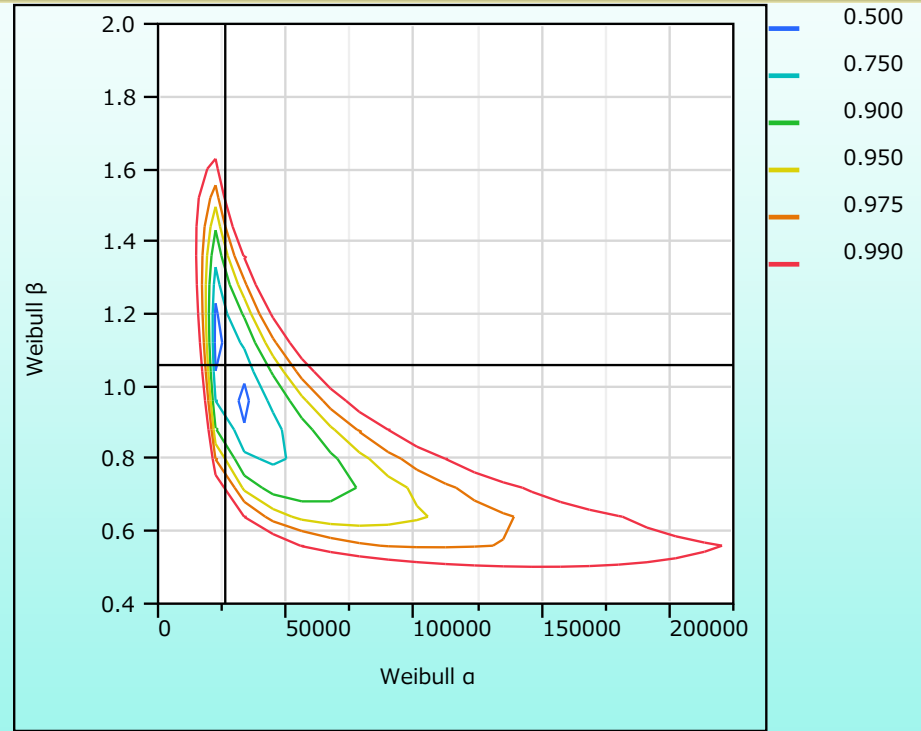
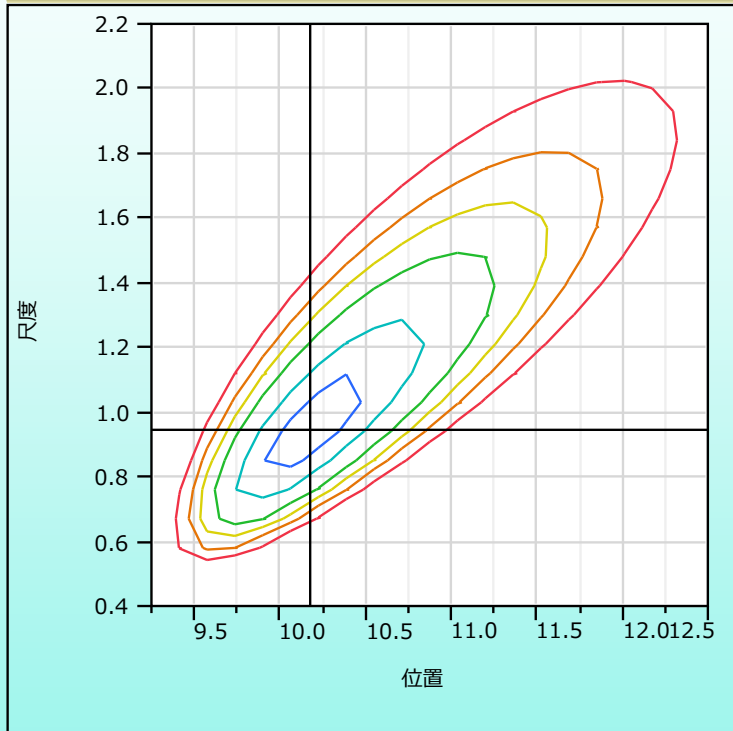
下限と上限の和の 1/2 と推定値との差 (0 か否かで判別)

Weibullパラメータは、（位置・尺度）
から計算しているので判定は不可

- ▼ パラメトリック推定
 - 確率推定値の保存
 - 分位点推定値の保存
 - ハザード推定値の保存
 - ✓ 尤度等高線の表示

対数尤度の等高線

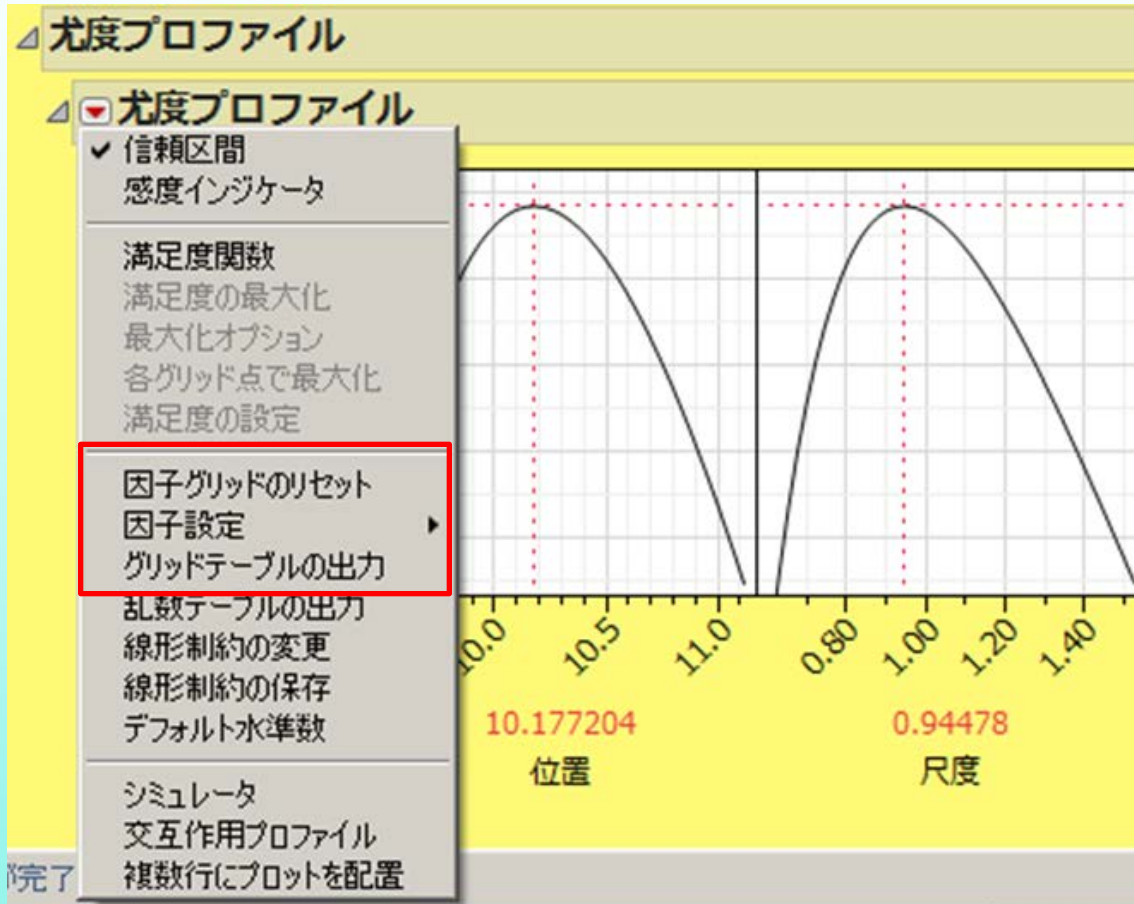
対数尤度の等高線



パラメータに関して歪んだ尤度の等高線

実際には、カイ2乗分布の下側確率が表示されているが、「信頼域」との説明が統計的詳細でされている。

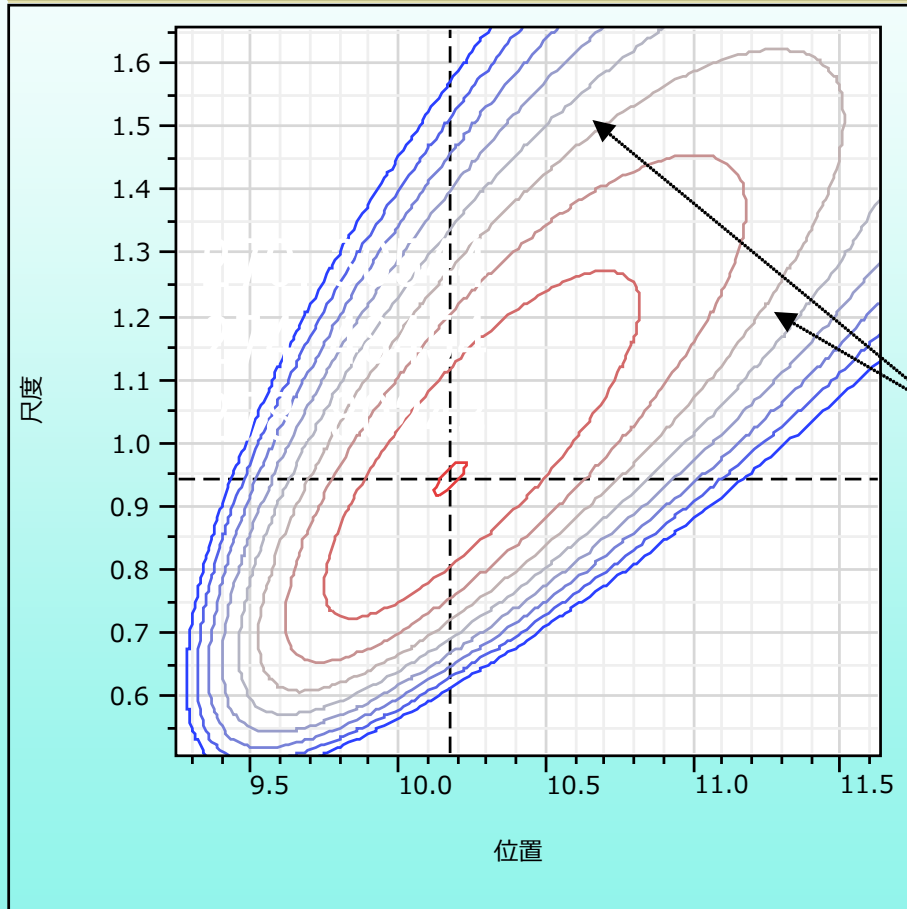
メッシュ状の対数尤度の出力



- ・尤度プロファイル
- ・因子の設定
- ・グリッドテーブルの出力
- ・パラメータの前後
101 × 101のメッシュ
JMPデータセット
- ・V10 では信頼区間の✓は機能していない

対数尤度の等高線

対数尤度の等高線図



対数尤度

- 140.000
- 139.395
- 138.790
- 138.185
- 137.580
- 136.975
- 136.370
- 135.765
- 135.160

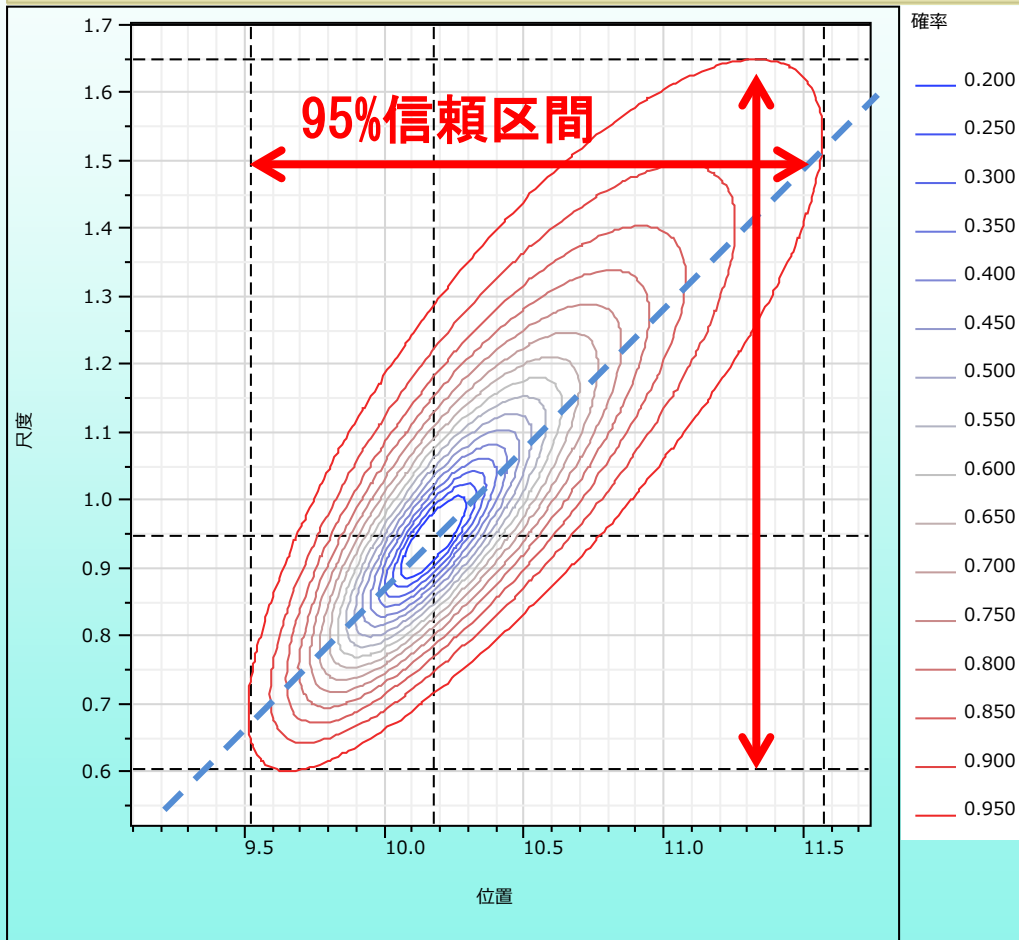
およその 95%線

137.073

対数尤度の最大値は 135.153 なので、カイ2乗分布の95%点の1/2, 1.921 を加えた 137.073 が95%信頼区間となる。

カイ2乗分布による下側確率

確率の等高線図



**JMPの等高
線に対応**

μ を固定, σ を動かし尤度のピーク

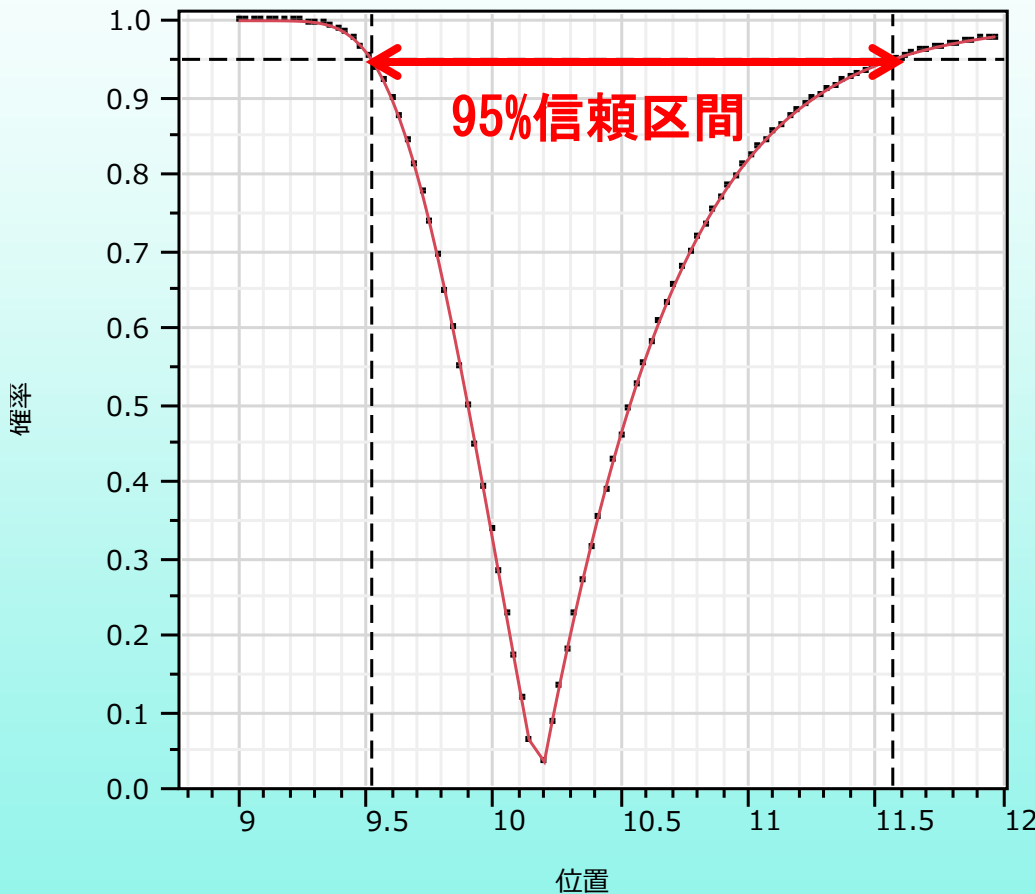
位置	尺度	対数尤度	最大値からの差	最大値からの比	確率	尤度のピーク
11.58	1.484	-137.125	1.972	0.139	0.953	•
11.58	1.496	-137.111	1.958	0.141	0.952	•
11.58	1.508	-137.101	1.948	0.143	0.952	•
11.58	1.520	-137.094	1.941	0.144	0.951	•
11.58	1.532	-137.090	1.937	0.144	0.951	•
11.58	1.544	-137.088	1.935	0.144	0.951	1
11.58	1.556	-137.090	1.937	0.144	0.951	•
11.58	1.568	-137.095	1.942	0.143	0.951	•

```

If Lag(対数尤度, 1) <= 対数尤度 => If (対数尤度 >= Lag(対数尤度, -1)) => 1
else => .
else => .
    
```

位置を固定し尺度を輪切りにして最大となる尤度に「1」を付与している。

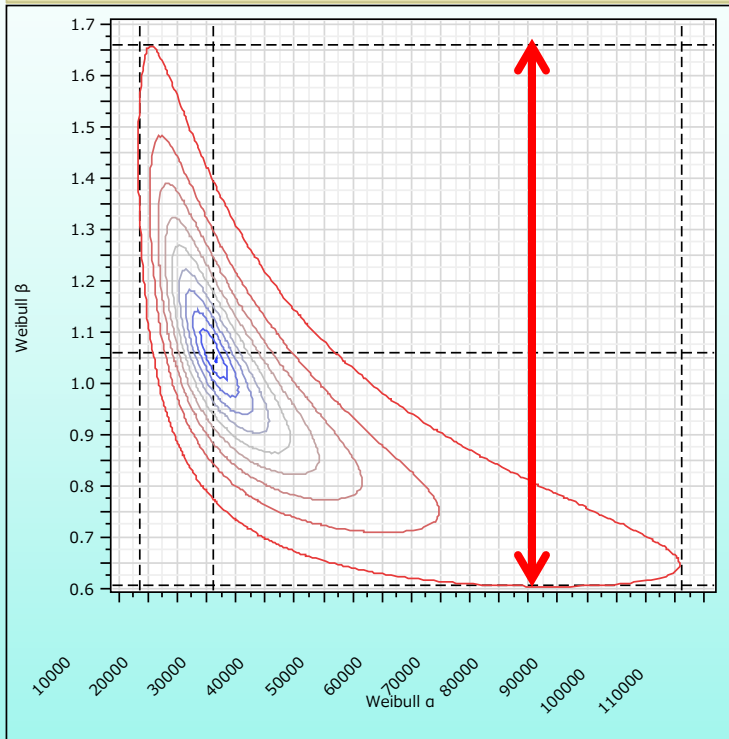
プロファイル尤度曲線



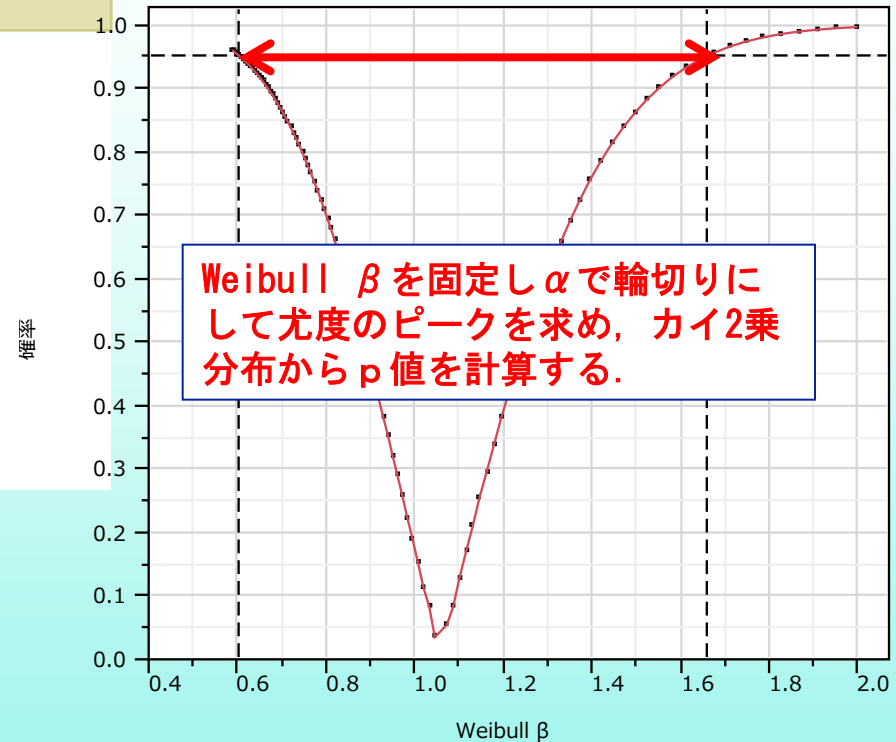
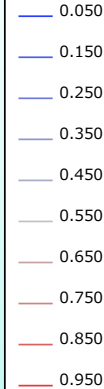
位置 μ をX軸とし
尺度 σ 方向での
対数尤度のピークを同定し, 最大の対数尤度からの差の2倍をカイ2乗分布の下側確率とし, 位置との関係を示した.

Weibull β の場合

確率の等高線図



確率



パラメータ	推定	標準誤	下側95%	上側95%
位置	10.1772	0.4659	9.5201	11.5720
尺度	0.9448	0.2394	0.6032	1.6502
Weibull α	26296.8452	12251.4283	13631.2390	106086.921
Weibull β	1.0584	0.2683	0.6060	1.6579

9. 今後の課題

多因子への拡張

◆ 本日の内容

- 一変量に対するワイブル分布・最小極値分布のあてはめ
 - 加速因子を温度とした場合に，温度を名義尺度として扱う場合
 - 温度を連続量としたワイブル回帰の実施
 - 温度をアレニウス変換した場合
- ## ◆ 多因子実験，直交表実験へ拡張した場合の例示が必要→付録3

普及活動

- ◆ 廣野氏は、パラメトリックな生存時間解析を行ったが、結果の提示がオッズ比であり、実験データの解析の習慣とは異なる。
- ◆ 日本の信頼性の統計解析では、ワイブル確率紙の使用が強調されすぎており、統計モデルを用いた解析が普及していない。
- ◆ JMPを用いたセミナーの拡充が必須
- ◆ 既存の教育コース講師陣への啓蒙も必要

様々な信頼性データへの対応

- ◆ 寿命の一変量 → 競合因子の探索
最適な故障分布の探索
- ◆ 寿命の二変量 → 電圧など加速因子の場合
数ロジスティックなど他の分布の使用
- ◆ 再生モデルの適用の事例と理論
- ◆ 劣化データ分析の事例と理論
- ◆ 信頼性予測
- ◆ 比例ハザードモデルとの使い分け

文献

- 1) 大橋靖雄・浜田知久馬 (1995), 生存時間解析, SASによる生物統計, 東大出版会.
- 2) 奥野忠一監訳, 柴田義貞, 藤野和健, 鎌倉稔成訳 (1988), 寿命データの解析, 日科技連出版社.
- 3) Kalbfleisch, J.D. and Prentice, R.L. (2002), The Statistical Analysis of Failure Time Data 2nd ed., Wiley.
- 4) 廣野元久 (2000), JMP4 ハンズオンセミナー ～生存時間分析の実行～, <http://www1.odn.ne.jp/~gengen525/index1.files/jmpv4user.pdf>
- 5) SAS Institute (2012), 品質管理および信頼性/生存時間, SAS Institut Inc.
- 6) 高橋行雄 (2011), JMP による各種分割実験入門 –変量効果モデルの基礎–, <http://www.yukms.com/biostat/takahasi2/rec/001.htm>

文献

- 7) 高橋行雄 (2013), 非線形回帰の基礎応用, SAS ユーザ総会論文集, 439-460,
<http://www.sascom.jp/download/pdf/SUGJ2013.pdf>
- 8) Meeker and Escobar (1998), Statistical Method for Reliability Data, Wiley.
- 9) 芳賀敏郎 (2004), 最小 2 乗法, 最尤法, 線形モデル, 非線形モデル,
<http://www.yukms.com/biostat/haga/download/archive/likelihood/Likelihood.pdf>
- 10) 鈴木和幸, 益田昭彦, 石田勉, 横川慎二 (2009), 信頼性データ解析, 日科技連出版社.
- 11) 二川清 (2012), はじめてのデバイス評価技術 2ed., 森北出版.
- 12) 広瀬英雄 (2004), 新段階昇圧法を用いた低破壊値の推定法について, 統計数理, Vol52:175-187. <http://www.ism.ac.jp/editsec/toukei/pdf/52-1-175.pdf>
- 13) 高橋倫也, 志村隆彰 (2004) 「特集 極値理論」について, 統計数理, Vol52:1-4.
<http://www.ism.ac.jp/editsec/toukei/pdf/52-1-001.pdf>

付録 1. 合成分散の一般式

それぞれの x_i が互いに独立で、分散が σ^2 と共通と仮定

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad \text{Var}(\bar{x}) = \frac{\hat{\sigma}^2}{n}$$

合成分散の一般式の適用

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n}x_1 + \frac{1}{n}x_2 + \dots + \frac{1}{n}x_n$$

$$z_i = \frac{x_i}{n}, \quad z_i \text{ を } x_i \text{ で偏微分 } d_i = \frac{\partial z_i}{\partial x_i} = \frac{1}{n}$$

$$\text{Var}(\bar{x}) = \mathbf{d}^T \Sigma \mathbf{d}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & & 0 \\ 0 & \sigma^2 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & & \sigma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/n \\ 1/n \\ \vdots \\ 1/n \end{bmatrix} = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

分布関数に対する95%信頼区間

時間 t における故障確率は, $y = \ln(t)$

$$\hat{F}(y) = 1 - \exp\left\{-\exp\left(\frac{y - \hat{\mu}_{\text{SEV}}}{\hat{\sigma}_{\text{SEV}}}\right)\right\}, \quad u = \frac{y - \hat{\mu}_{\text{SEV}}}{\hat{\sigma}_{\text{SEV}}}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \text{Var}(\hat{\mu}_{\text{SEV}}) & \text{Cov}(\hat{\mu}_{\text{SEV}}, \hat{\sigma}_{\text{SEV}}) \\ \text{Cov}(\hat{\mu}_{\text{SEV}}, \hat{\sigma}_{\text{SEV}}) & \text{Var}(\hat{\sigma}_{\text{SEV}}) \end{bmatrix}$$

$$d_1 = \frac{\partial u}{\partial \hat{\mu}_{\text{SEV}}} = \frac{-1}{\hat{\sigma}_{\text{SEV}}}, \quad d_2 = \frac{\partial u}{\partial \hat{\sigma}_{\text{SEV}}} = \frac{-(y - \hat{\mu}_{\text{SEV}})}{\hat{\sigma}_{\text{SEV}}^2} = \frac{-u}{\hat{\sigma}_{\text{SEV}}}$$

$$\text{Var}(\hat{u}) = \mathbf{d}^T \Sigma \mathbf{d}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 / \hat{\sigma}_{\text{SEV}} & -u / \hat{\sigma}_{\text{SEV}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Var}(\hat{\mu}_{\text{SEV}}) & \text{Cov}(\hat{\mu}_{\text{SEV}}, \hat{\sigma}_{\text{SEV}}) \\ \text{Cov}(\hat{\mu}_{\text{SEV}}, \hat{\sigma}_{\text{SEV}}) & \text{Var}(\hat{\sigma}_{\text{SEV}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 / \hat{\sigma}_{\text{SEV}} \\ -u / \hat{\sigma}_{\text{SEV}} \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{\hat{\sigma}_{\text{SEV}}}\right)^2 \left[\text{Var}(\hat{\mu}_{\text{SEV}}) + 2u \text{Cov}(\hat{\mu}_{\text{SEV}}, \hat{\sigma}_{\text{SEV}}) + u^2 \text{Var}(\hat{\sigma}_{\text{SEV}}) \right]$$

最小極値の分散からワイブルへ

ディーゼル発電機ファンデータ：最小極値分布

$$\hat{\mu}_{\text{SEV}} = 10.1722, \quad \text{分散は } \text{Ver}(\hat{\mu}_{\text{SEV}}) = 0.4657$$

Weibull $\hat{\alpha}$ は, $\hat{\alpha} = \exp(\hat{\mu}_{\text{SEV}})$

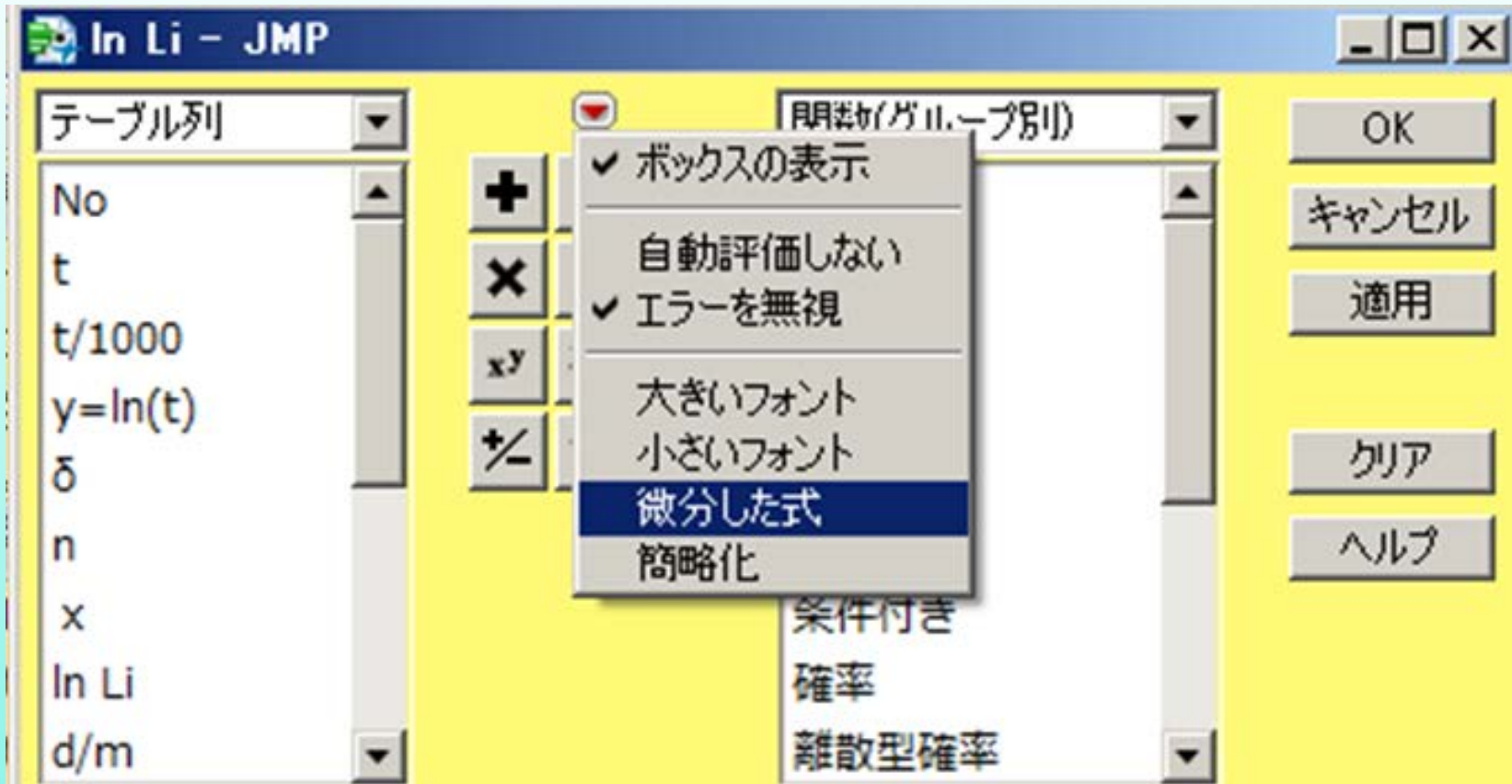
$$\hat{\mu}_{\text{SEV}} \text{ で偏微分, } d = \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial \hat{\mu}_{\text{SEV}}} = \exp(\hat{\mu}_{\text{SEV}})$$

合成分散の一般式は, 1次元の場合でも適用できるので

$$\text{Var}(\hat{\alpha}) = d \cdot \text{Ver}(\hat{\mu}_{\text{SEV}}) \cdot d = [\exp(\hat{\mu}_{\text{SEV}})]^2 \text{Ver}(\hat{\mu}_{\text{SEV}})$$

付録 2. JMPで偏微分

計算式の微分



偏微分の実行

対数尤度のパラメータによる微分式

$$\ln L_i = \left[\delta_i \left(-\ln(\sigma) + \frac{y_i - (m + \beta_1 x_i)}{s} \right) - \exp \left(\frac{y_i - (m + \beta_1 x_i)}{s} \right) \right] n_i$$

$\delta * \left(-\text{Log}[s] + \frac{y=\ln(t) - (m + b1 * x)}{s} \right) - \text{Exp} \left(\frac{y=\ln(t) - (m + b1 * x)}{s} \right) * n$

パラメータとした (m, b1, s) のどれかを選択

「微分した式」の実行. (m) について微分の結果の表示

$\frac{-1}{s} * \delta + - \text{Exp} \left(\frac{y=\ln(t) - (m + b1 * x)}{s} \right) * \frac{-1}{s} * n$

偏微分式の相互検証

JMPの結果(抜粋)

	No	t	t/1000	$y=\ln(t)$	δ	n	x	$\ln L_i$	d/m(b0)	d/b1	d/s	d/mm
1	1	5000	5.000	8.517	0	30	10	-0.1735	0.2474	2.4743	-1.2750	-0.3529
2	2	1298	1.298	7.169	1	1	40	-3.8988	-1.4058	-56.2308	4.5334	-0.0293
3	3	1390	1.390	7.237	1	1	40	-3.8026	-1.4037	-56.1464	4.3874	-0.0323

Excelの結果(抜粋)

変数x	件
群 温度	$y=\ln(t)$ 数 δ
1 10	8.517 30 0
2 40	7.169 1 1
2 40	7.237 1 1

$\ln L_i$	β_0^{\wedge}	β_1	σ	$\beta_0^{\wedge 2}$	$\beta_0\beta_1$
-0.1734	0.2474	2.4741	-1.2749	-0.3529	-3.5292
-3.8986	-1.4059	-56.2364	4.5337	-0.0293	-1.1734
-3.8024	-1.4038	-56.1519	4.3876	-0.0323	-1.2939

完全に一致しないのは、設定したパラメータの精度の問題

分散共分散行列の検証

JMP偏微の合計

d/mm	合計	-67.0875
d/m b1	合計	-4187.5369
d/m s	合計	47.0449
d/b1 b1	合計	-280913.3373
d/b1 s	合計	1604.3458
d/s s	合計	-220.3195



Excel

Z		
-67.2	-4192	47.0
-4192	-2.8E+05	1598
47.0	1598	-220.4

共分散行列

寿命の二変量の結果

パラメータ	β_0	β_1	σ
β_0	0.4691	-0.0067	0.0514
β_1	-0.0067	0.0001	-0.0007
σ	0.0514	-0.0007	0.0104



$(-Z)^{-1}$		
0.469	-0.007	0.051
-0.007	0.000	-0.001
0.051	-0.001	0.010

付録3. 廣野事例に対する改善提案

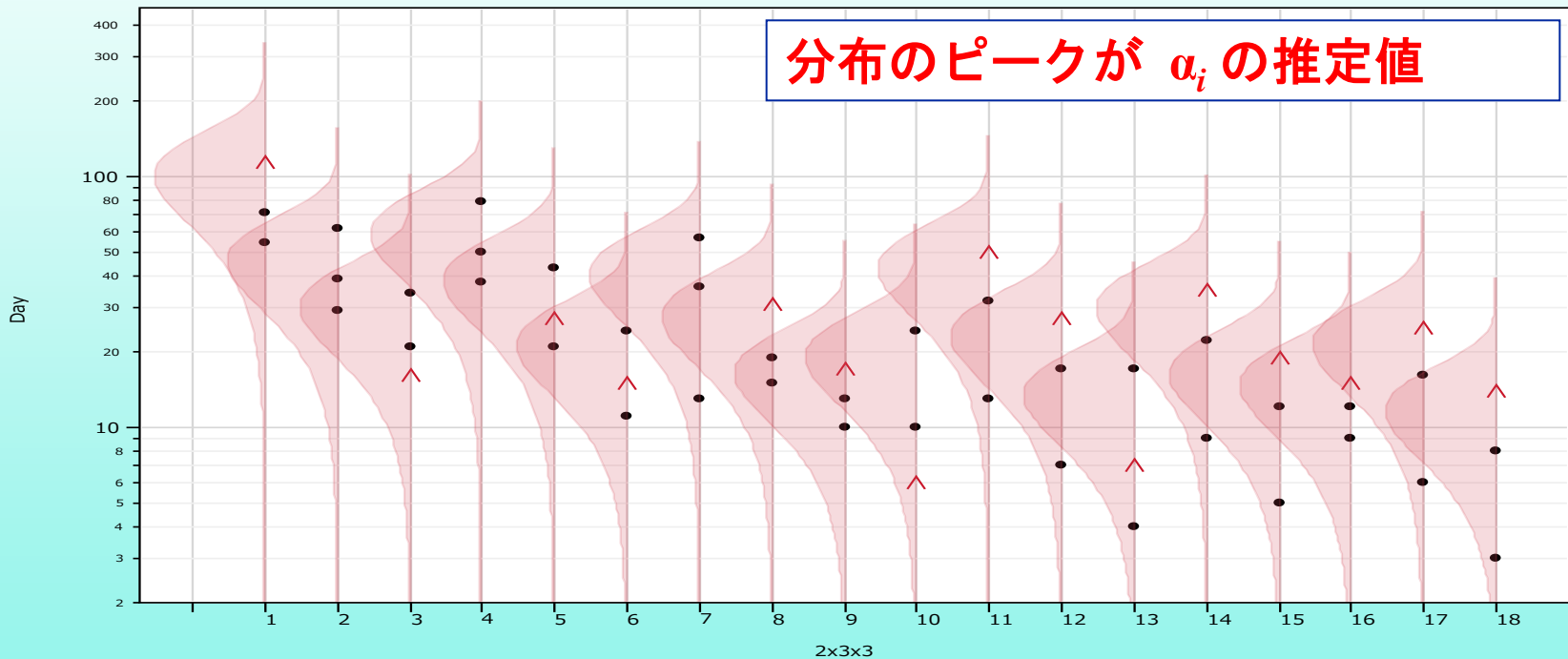
- ◆ 廣野氏が提示した解析方法（スライド 8~11）
 - 3元配置実験（2質 × 3量 × 3量，繰り返し3）
（接着剤2種 × 温度3水準，相対湿度3水準）
 - パラメトリックな伝統的な生存時間解析の適用
 - 推定されたパラメータから，接着剤Aは，Bに比べて1.3 倍，信頼性が高い ($p < 0.01$) と結論している。
- ◆ 高橋の疑問：交互作用を無視していいのか

高橋の改善案

- ◆ $2 \times 3 \times 3 = 18$ 水準の1元配置とみなして、寿命の二変量を使って、Weibull β を共通として、18個のWeibull α (下側 確率 0.632 点)を推定する.
 - ◆ 打ち切りデータも含めた推定値となっている。
- ◆ 推定されたWeibull α を $2 \times 3 \times 3$ の3元配置，繰り返しなしの3元表に再構成する。
- ◆ 繰り返しなしの 3元配置分散分析 (2質 \times 3量 \times 3量)を行う。2次の交互作用を含める。
 - ◆ 誤差の自由度は、11あり、応答局面の解析も可能

共通の Weibull β で α_i の推定

接着剤	A			B			
温度	30	40	50	30	40	50	
湿度	60	70	80	...	60	70	80



△の打切りデータは不自然である. 人工的な操作によって打ち切りにしたと思われる.

解析用 Weibull α 推定値 (Day)

	glue = A			glue = B		
	相対湿度			相対湿度		
温度	60%	70%	80%	60%	70%	80%
30°C	100.52	46.07	30.08	19.03	42.86	23.05
40°C	58.98	38.35	21.22	13.43	29.85	16.24
50°C	40.61	27.47	16.39	14.71	21.38	11.62

(2×3×3)繰り返し3のデータから、18水準の1元配置とみなして、寿命の二変量を使い、Weibull β を共通として、18個のWeibull α (下側 確率 0.632 点)を推定した結果である。

Weibull α についての解析結果

分散分析

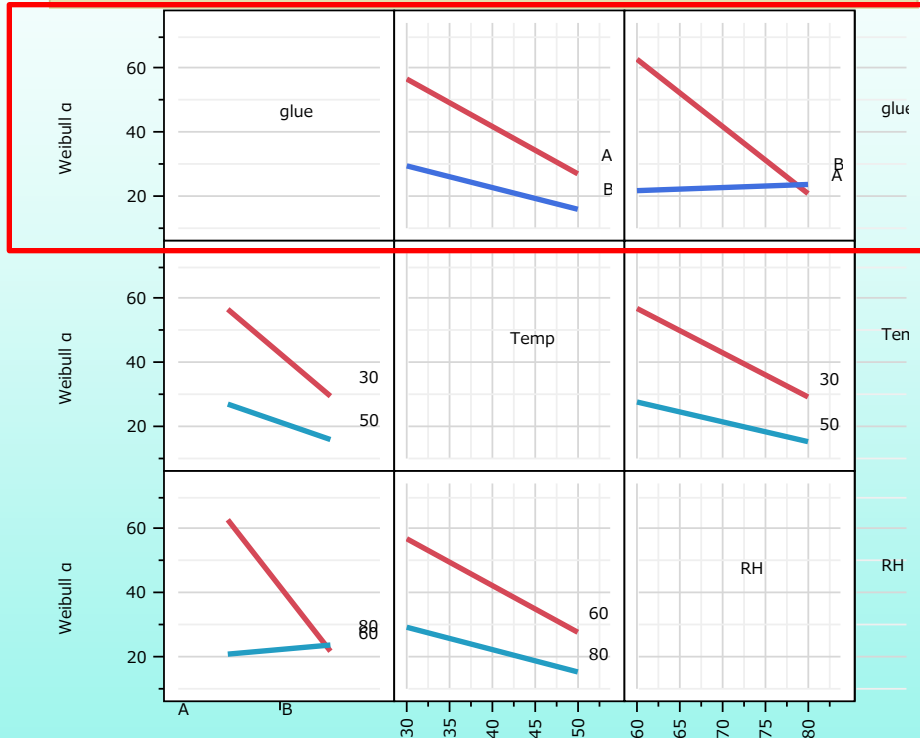
要因	自由	平方和	平均平方	F値
モデル	6	6717.48	1119.58	10.3280
誤差	11	1192.42	108.40	
全体(修正済み)	17	7909.90		

p値(Prob>F)
0.0006 *

効果の検定

要因	自由	平方和	F値	p値(Prob>F)
glue	1	2138.27	19.73	0.0010 *
Temp	1	326.44	3.01	0.1106
RH	1	440.27	4.06	0.0690
glue*Temp	1	251.86	2.32	0.1557
glue*RH	1	1545.05	14.25	0.0031 *
Temp*RH	1	191.34	1.77	0.2109

交互作用プロファイル



接着剤Aは、温度変化に対してBより耐久性があるが、湿度が高い場合に難点があり、製品化には更なる改良が必要である

ご清聴ありがとうございました

2015年3月6日のJMPer's Meeting の

スライドに注釈を付け加え

いくつかの訂正もしました

2015年3月9日